Definice:

Řekneme, že je funkce f spojitá v bodě a, pokud

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x\in U_\delta(a))(f(x)\in U_\varepsilon(f(a)))$$

Řekneme, že je funkce f spojitá v bodě a zprava, pokud

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x\in (a,a+\delta))(f(x)\in U_\varepsilon(f(a)))$$

Řekneme, že je funkce f spojitá v bodě a zleva, pokud

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x\in (a-\delta,a))(f(x)\in U_\varepsilon(f(x)))$$

Řekneme, že je funkce f spojitá na intervalu (a,b), pokud je spojitá v každém bodě $x\in(a,b)$.

Řekneme, že je funkce f spojitá na intervalu $[a,b]$, pokud je spojitá v každém bodě $x\in(a,b)$, v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva.

Analogicky definujeme spojitost na intervalech $[a,b)$, $(a,b]$.

Věta o kořeni spojité funkce:

Nechť je funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$ a nechť je $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Pak existuje $x \in (a, b)$ takové, že $f(x) = 0$.

Důkaz věty je na jiném slidu a jiném videu.

Důsledek 1 věty o kořeni spojité funkce:

Nechť je f spojitá na (a,b) a nemá na (a,b) kořen.

Pak platí právě jeden z výroků:

1) $(\forall x \in (a,b))(f(x) > 0)$
2) $(\forall x \in (a,b))(f(x) < 0)$

Důkaz provedeme sporem. Předpokládáme existenci $x_1, x_2 \in (a,b)$ splňujících $f(x_1) > 0$, $f(x_2) < 0$.

Pak z věty o kořeni spojité funkce plyne existence $x \in (x_1, x_2) \cup (x_2, x_1)$, že $f(x) = 0$ a to je ve sporu s předpokladem, že f nemá kořen na (a,b). $\square$

Důsledek 2 věty o kořeni spojité funkce na řešení nerovnic:

Nechť L, P jsou funkce spojité na (a,b) a nechť platí $(\forall x \in (a,b))\,(L(x) \neq P(x))$.

Pak z existence $x \in (a,b)$, pro nějž je $L(x) < P(x)$ plyne $(\forall x \in (a,b))\,(L(x) < P(x))$.

Z existence $x \in (a,b)$, pro nějž je $L(x) > P(x)$ plyne
$$(\forall x \in (a,b))\,(L(x) > P(x)).$$

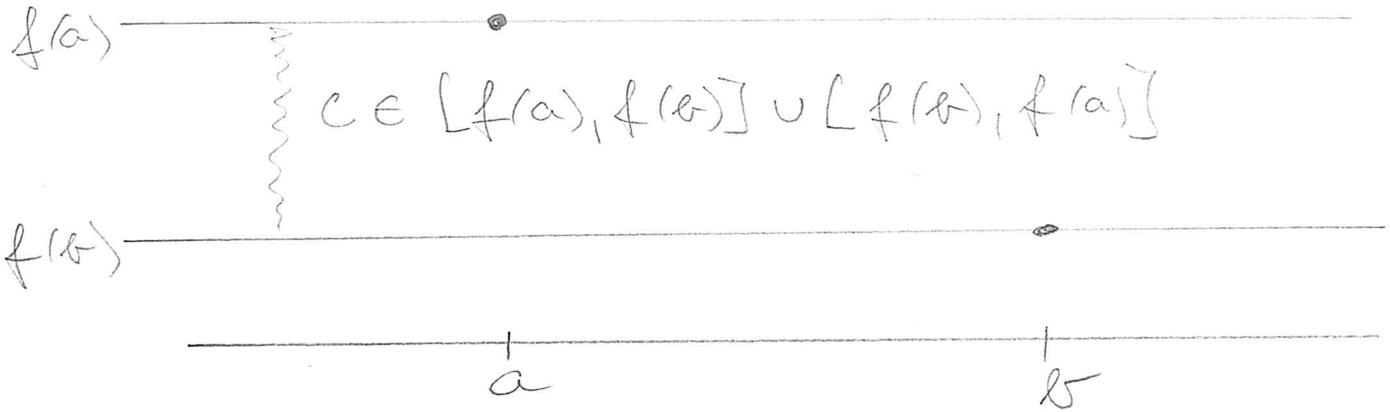
Důkaz:
Použijeme důsledek 1 na funkci $f(x) = L(x) - P(x)$.
Stačí si uvědomit, že $f(x) > 0 \iff L(x) > P(x)$ a analogicky pro $f(x) < 0$.

$\square$

Věta o nabývání mezihodnot:

Nechť je funkce f spojitá na $[a,b]$ a nechť je $c \in [f(a), f(b)] \cup [f(b), f(a)]$.

Pak existuje $x \in [a,b]$, že $f(x) = c$.



Důkaz:

Pro $c = f(a)$ je $x = a$. Pro $c = f(b)$ je $x = b$.

Pro $c \in (f(a), f(b)) \cup (f(b), f(a))$ použijeme větu o kořeni spojité funkce na funkci $g(x) = f(x) - c$.

Pak je $g(a) > 0 \iff f(a) > c$,

analogicky pro $g(a) < 0$, $g(b) > 0$, $g(b) < 0$.

Odtud dostaneme, že

$$c \in (f(a), f(b)) \cup (f(b), f(a)) \iff g(a) \cdot g(b) < 0.$$

Ze spojitosti f na $[a, b]$ plyne spojitost g na $[a, b]$.

Odtud plyne: $(\exists x \in (a, b))(g(x) = 0)$.

Pro tato x je $f(x) = c$. $\square$

Důsledek 3 - existence odmocniny:

Nechť $c \in [0,+\infty)$.

Pak $(\exists x \in [0,+\infty))(x^2 = c)$.

(Číslo x nazýváme druhou odmocninou z c.)

Důkaz:

Pro $c = 0$ je $x = 0$.

Pro $c \in (0,1)$ použijeme větu o nabývání mezihodnot na funkci $f(x) = x^2$ na intervalu $[0,1]$.

Pro $c = 1$ je $x = 1$.

Pro $c > 1$ použijeme větu o nabývání mezihodnot na funkci f (viz výše) na intervalu $[1,c]$. Zde využijeme, že pro $c > 1$ je $c^2 > c$, a tedy $c \in (f(1), f(c))$.

$\square$