Matematická analýza pro učitele
(první čtyři kapitoly a jeden dodatek)

Martina Šimůnková

22. září 2022

Obsah

Kapitola 1

Úvod

V textu se budeme zabývat *funkcemi* jedné reálné proměnné. V této úvodní kapitole vyložíme, co to funkce je, a nastíníme, co všechno nás na funkcích bude zajímat.

1.1 Co je to funkce

Historicky byla funkce předpis, např. $f(x) = x^2$. Dnes pod pojmem funkce rozumíme závislost mezi dvěma proměnnými, která může, ale nemusí být dána jedním předpisem. Tyto stručné historické poznámky čerpáme z [2], 4.4.7, zvídavý čtenář tam najde další podrobnosti.

Funkce zadané (jedním) předpisem nazýváme *elementármími funkcemi*. Zkoumání těchto funkcí bude jedním z našich cílů, ale nikoliv jediným.

Příkladem funkcí zadaných jinak než jedním předpisem jsou funkce f, g,[1]

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & x < 1 \\ x/2 & x \geq 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & x < 1 \\ x & x \geq 1 \end{cases} \tag{1.1}$$

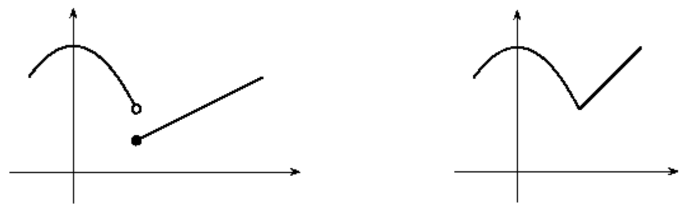
Dirichletova funkce δ

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

nebo funkce zadané empiricky jako například průběh teploty naměřené meteorologickou stanicí v závislosti na čase.

[1]Zápis (1.1) čteme: funkce f přiřadí číslu x menšímu než jedna číslo $2 - x^2$ a číslu x většímu nebo rovnému jedné číslo...

Důležitým pojmem je *graf funkce*. Na obrázku jsou grafy funkcí z (1.1), vlevo funkce f, vpravo g.



Grafem Dirichletovy funkce jsou dvě „řídké“ přímky.

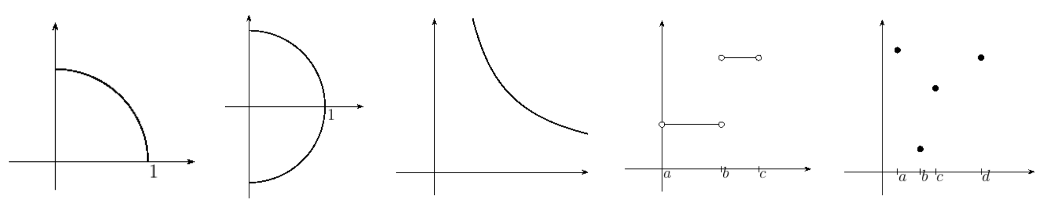
Někdy se funkce definuje primárně jako její graf, tedy množina dvojic reálných čísel $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ taková, že k číslu x leží na tomto grafu maximálně jeden bod $[x, y]$. Jinak řečeno, leží-li body $[x, y_1]$, $[x, y_2]$ na grafu funkce, musí platit $y_1 = y_2$. Formálně zapsáno $G \subset \mathbb{R}^2$ je grafem funkce, pokud platí

$$(\forall x, y_1, y_2 \in \mathbb{R})(([x, y_1] \in G \wedge [x, y_2] \in G) \Rightarrow y_1 = y_2).$$

Čteme: pro každou trojici reálných čísel x, y_1, y_2 z platnosti $[x, y_1] \in G$, $[x, y_2] \in G$ plyne $y_1 = y_2$. Rozmyslete si, že významově stejné je tvrzení: pro každou trojici reálných čísel x, y_1, y_2 splňující $[x, y_1] \in G$, $[x, y_2] \in G$ platí $y_1 = y_2$.

Teprve z grafu funkce je poté odvozen předpis a definiční obor funkce. Číslu $x \in \mathbb{R}$ přiřadíme číslo y splňující $[x, y] \in G$. Definičním oborem je množina čísel x, pro něž existuje číslo y takové, že $[x, y] \in G$.

Vysvětlíme na následujících grafech.



Budeme procházet obrázky zleva doprava.

1. Na obrázku je čtvrtkružnice, která je grafem funkce s definičním oborem $[0, 1]$ a předpisem $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$.

2. Půlkružnice na obrázku není grafem funkce. Její rovnice je $x^2 + y^2 = 1$, $x \in [0, 1]$. Pro $x \in [0, 1)$ obsahuje dva různé body $[x, \sqrt{1 - x^2}]$, $[x, -\sqrt{1 - x^2}]$.

3. Na obrázku je část větve hyperboly. Je grafem funkce, ale určit pouhým pohledem z grafu její definiční obor a předpis není jednoduché, protože není možné hyperbolu nakreslit celou. Doplníme-li, že souřadné osy jsou jejími asymptotami, můžeme určit definiční obor: $(0, +\infty)$. O funkčním předpisu víme, že je $x \mapsto k/x$, kde konstantu k nelze určit z grafu bez měřítka.[2]

4. Na obrázku je graf po částech konstantní funkce s definičním oborem $(a, b) \cup (b, c)$. Jiným způsobem můžeme tento obor zapsat $(a, c) \setminus \{b\}$. [3]

5. Na obrázku tvoří graf funkce čtyři body. Definiční obor funkce je čtyřprvková množina $\{a, b, c, d\}$.

Výše mluvíme o funkci jako vztahu dvou proměnných. Jednu z proměnných zpravidla označujeme x a nazýváme ji *argumentem* funkce, *proměnnou* funkce, *vzorem* a ve středoškolských učebnicích zpravidla nezávisle proměnnou. Druhou proměnnou zpravidla označujeme y nebo $f(x)$ (pro funkci pojmenovanou f) a nazýváme ji *funkční hodnotou*, *obrazem* a ve středoškolských učebnicích zpravidla závisle proměnnou. Pokud mají proměnné nějaký význam, třeba geometrický (délka, obsah, souřadnice, ...) nebo fyzikální (čas, rychlost, síla, teplota, ...), často použijeme místo x, y značení dané veličině odpovídající. Například označíme čas t, vzdálenost s a $s = 1/2gt^2$ je závislost dráhy na čase při pohybu v gravitačním poli intenzity g. Nebo označíme délku hrany krychle a, objem krychle V a $V = a^3$ je závislost objemu na délce hrany.

Pojmy (termíny) *vzor* a *obraz* znáte z geometrie při zobrazování (posunutí, otočení, zrcadlení). Funkce je speciálním typem zobrazení, kde vzory a obrazy jsou čísla.

Úkol. Uveďte další příklady funkcí jak elementárních, tak ostatních. Nejlépe takové, které popisují závislost fyzikálních, geometrických, případně jiných „reálných“ veličin. Dále uveďte příklady množin $G \subset \mathbb{R}^2$ a určete, zda jsou grafem funkce a případně určete definiční obor a předpis funkce.

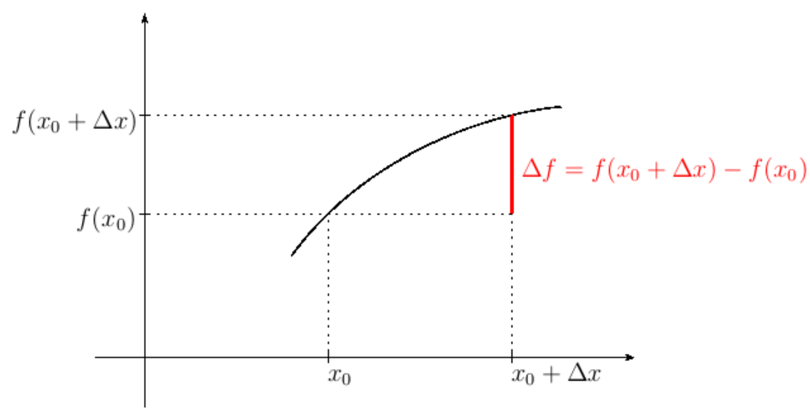
---

[2] Z grafu určíme jen znaménko k. Pro hyperbolu v prvním kvadrantu je $k > 0$.

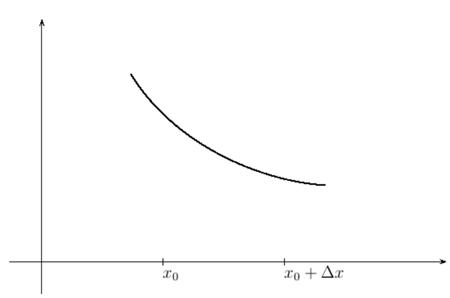
[3] První způsob je sjednocení dvou otevřených intervalů, druhý je rozdíl intervalu a jednoprvkové množiny.

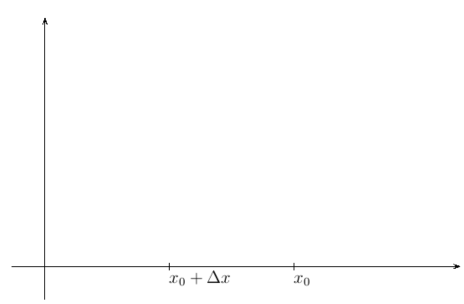
1.2 Co budeme na funkcích zkoumat

Bude nás zajímat, jak se mění funkční hodnota při změně proměnné – tyto změny zpravidla znázorňujeme na grafu funkce a používáme k tomu níže uvedenou terminologii.



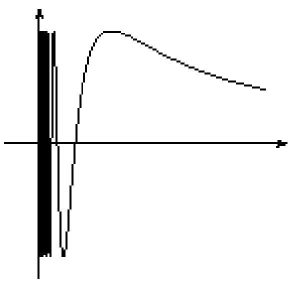
Číslo Δx budeme nazývat *přírůstkem proměnné* x, číslo Δf *přírůstkem funkce* (přesnější by asi bylo říkat přírůstek funkční hodnoty, ale moc se to nepoužívá). Následující obrázky ukazují situaci, kdy je přírůstek funkce, případně přírůstek proměnné záporný.

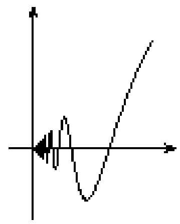




1.3 Spojitost funkce

V případě, že pro „malé" hodnoty Δx je přírůstek funkce Δf „malý", budeme říkat, že je funkce f *spojitá v bodě* x_0. Úvozovkami chceme zdůraznit značnou vágnost tohoto popisu. Pojem spojitosti se vyvíjel, podle poznámek 4.4.7 zmíněných výše byly kdysi obě funkce f, g uvedené v (1.1) považovány za nespojité[4] v bodě $x = 1$, protože se v tomto bodě mění funkční předpis. Podle současné definice spojitosti není funkce f v bodě $x = 1$ spojitá zatímco funkce g ano. Přesná definice pojmu spojitosti je poměrně obtížná a uvedeme ji později. K jejímu bližšímu objasnění uvedeme ještě několik příkladů.





Na levém obrázku je graf funkce

$$f(x) = \sin(1/x),$$

na pravém

$$g(x) = x\sin(1/x).$$

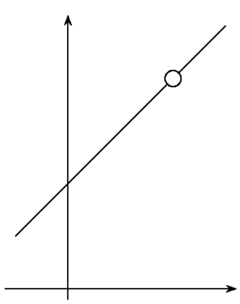
Obě funkce mají kořeny v bodech $1/x = k\pi$, tedy $x = 1/(k\pi)$, a tedy v okolí nuly je kořenů nahuštěno nekonečně mnoho. V bodě $x = 0$ tyto funkce nejsou definované. Pokud chceme, můžeme je v tomto bodě dodefinovat. Vzniknou tím nové funkce, které označíme $\hat{f}$, $\hat{g}$.

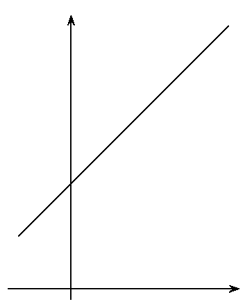
$$\hat{f}(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad \hat{g}(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Říkáme, že funkce $\hat{f}$ je *rozšířením funkce* f, funkce $\hat{g}$ je rozšířením funkce g.

Protože pro hodnoty x „blízké“ nule jsou hodnoty $\hat{g}(x)$ „blízké“ $\hat{g}(0)$, je funkce $\hat{g}$ spojitá v bodě nula a mluvíme o *spojitém rozšíření*. Funkce $\hat{f}$ je rozšířením funkce f, ale není jejím spojitým rozšířením.

Na následujících obrázcích je další příklad spojitého rozšíření, kdy definiční obor výrazu zvětšíme pokrácením.





Na obrázku vlevo je graf funkce

$$h(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

a vpravo graf funkce

$$\hat{h}(x) = x + 1.$$

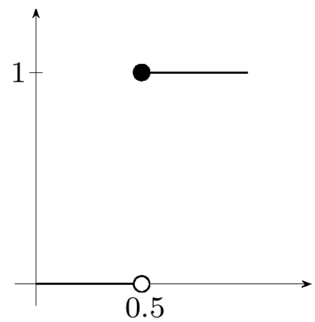
K pojmu spojitosti zatím uvedeme, že elementární funkce (tedy funkce za-

[4]Říkáme-li, že je funkce v bodě nespojitá, máme na mysli, že není spojitá. Toto není zcela samozřejmé, například rostoucí a nerostoucí funkce nejsou v tomto smyslu doplňkové pojmy.

dané jedním funkčním předpisem, které znáte ze střední školy) jsou na svých definičních oborech spojité.

Pokud funkce není v bodě x_0 spojitá, ale lze ji v tomto bodě spojitě rozšířit, říkáme, že má funkce v bodě x_0 *odstranitelnou nespojitost.* Příkladem odstranitelných nespojitostí je nespojitost funkce g v bodě $x = 0$ a nespojitost funkce h v bodě $x = 1$.

Dalším typem nespojitosti je *nespojitost typu skoku.*



Uvažujme funkci, která číslu x přiřadí číslo, které z čísla x vznikne zaokrouhlením na celé číslo. Tato funkce není spojitá v bodě $x = 0.5$.
Čísla $x \in (0, 0.5)$ zaokrouhlíme na nulu, zatímco čísla $x \in (0.5, 1)$ zaokrouhlíme na jedničku. Funkční hodnota tedy při „přechodu“ přes $x = 0.5$ „skočí“ o jedna.

Příkladem funkce, která není spojitá a tato nespojitost není odstranitelnou nespojitostí ani nespojitostí typu skoku, jsou funkce f a $\hat{f}$.

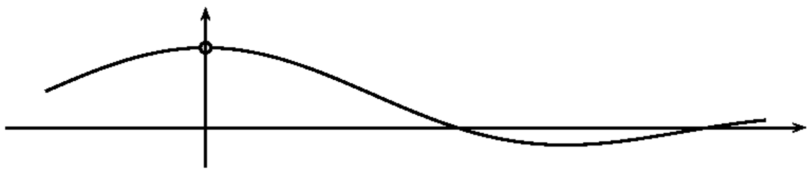
1.4 Limita funkce

S pojmem spojitosti úzce souvisí pojem limita. Například funkce $h : x \mapsto (x^2 - 1)/(x - 1)$ zmiňovaná výše není definovaná v bodě $x = 1$, ale má v tomto bodě limitu rovnu $\hat{h}(1) = 2$. Zjednodušeně to znamená, že pro x blízké jedné je $h(x)$ blízké dvěma.

Dalším příkladem funkce mající limitu je výše zmiňovaná funkce $g : x \mapsto x \sin(1/x)$. V bodě nula má limitu rovnu nule.

Příklad funkce nemající limitu je $f : x \mapsto \sin(1/x)$ v bodě nula. Vysvětlíme proč: pro velká $k \in \mathbb{N}$ jsou obě $x_+ = 1/(\pi/2 + 2k\pi)$ a $x_- = 1/(-\pi/2 + 2k\pi)$ „hodně blízko“ nule a zároveň je $f(x_+) = \sin(1/x_+) = 1$ a $f(x_-) = \sin(1/x_-) = -1$. Neexistuje tedy žádné reálné číslo, kterému by byly hodnoty $f(x)$ „blízké“ pro „všechna x blízká“ nule.

Na následujícím obrázku je graf funkce $x \mapsto (\sin x)/x$. V nule není funkce definovaná, ale z obrázku je vidět, že má v nule limitu. Hodnota limity závisí na jednotkách, které zvolíme pro výpočet sinu. Oblouková míra (radiány) se vyznačuje tím, že hodnota této limity je rovna jedné. V některé z dalších kapitol tuto skutečnost ukážeme. Připomeneme si přitom, jak je oblouková míra definovaná.

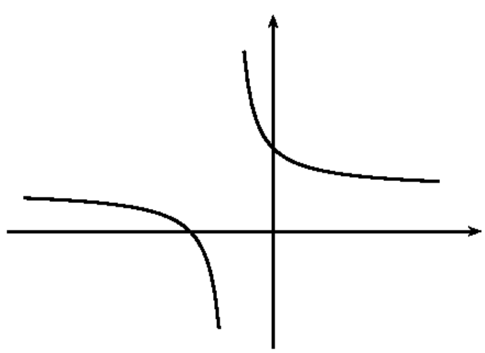


1.4.1 Nevlastní limity, jednostranné limity

Výše uvedené limity popisují chování funkce v okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$, a to takové chování, kdy funkční hodnoty jsou blízké hodnotě $L \in \mathbb{R}$ pro x blízké x_0. Číslo L nazýváme limitou funkce v bodě x_0.

Pojem limita funkce zahrnuje i případy, kdy některé z čísel x_0, L, nebo případně obě, jsou nekonečné. Vysvětlíme na funkci f a jejím grafu.

$$f : x \mapsto \frac{x+1}{2x+1}$$



Pro x velké kladné je funkční hodnota blízká jedné polovině. Říkáme, že má funkce f v bodě $+\infty$ limitu rovnu $1/2$ a o limitě mluvíme jako o vlastní limitě v nevlastním bodě.

Předpona ne ve slově nevlastní označuje nekonečnou hodnotu.

Podobně je limita funkce f v bodě $-\infty$ rovna $1/2$.

Úkol. Zodpovězte otázky: Jak se jmenuje křivka, která je grafem funkce f? Jaký má tato křivka vztah k přímce o rovnici $y = 1/2$? A jak vztah křivky a přímky souvisí s nevlastními limitami, o kterých se píše výše?

Nevíte-li si rady, tak načrtněte graf funkce f, popište osy, dokreslete na ně měřítko a načrtněte i přímku o rovnici $y = 1/2$.

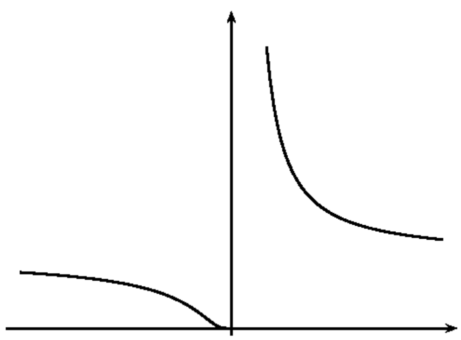
V bodě $x = -1/2$ není funkce f definovaná a v jeho okolí nabývá velkých hodnot. Pro x o trochu větší než $1/2$ jsou funkční hodnoty velké kladné –

říkáme, že má funkce v bodě $x = -1/2$ zprava limitu rovnu $+\infty$ a mluvíme o nevlastní limitě ve vlastním bodě.

Podobně: v bodě $x = -1/2$ zleva má funkce limitu rovnu $-\infty$.

Úkol. Zodpovězte stejné otázky jako výše pro přímku o rovnici $x = -1/2$.

Ještě jeden graf a příklad: $x \mapsto 2^{1/x}$.



Limita v bodě $x = 0$ zleva je rovna nule, zprava je rovna $+\infty$.
Z grafu lze tušit i limity v bodech $\pm\infty$. V kapitole o limitách složené funkce si vysvětlíme, že jsou obě rovny jedné. Pokud se nad nimi chcete zamyslet už teď, tak si rozmyslete, jakých hodnot nabývá výraz $2^{1/x}$ pro x hodně velké kladné, případně hodně velké záporné.

Úkol. Jednostranné limity v nule jsme určili z grafu. Určete je bez grafu jen z vlastností (a grafů) funkcí $x \mapsto y = 1/x$, $y \mapsto 2^y$.

Dalším příkladem jednostranných limit je „zaokrouhlovací" funkce z konce článku 1.4. Limita této funkce v bodě 0.5 zleva je rovna nule a zprava rovna jedné.

1.5 Aproximace funkcí

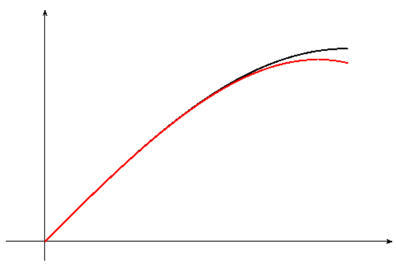
Někdy si potřebujeme práci s funkcemi zjednodušit, proto „složitou" funkci nahradíme „jednodušší" funkcí. Za toto nahrazení a zjednodušení zaplatíme menší přesností. Místo o nahrazení mluvíme většinou o *aproximaci*.

Za aproximující funkci často volíme lineární funkci, nebo, chceme-li aproximaci zpřesnit, polynom.

Aproximace může být lokální nebo globální.

1.5.1 Aproximace polynomem

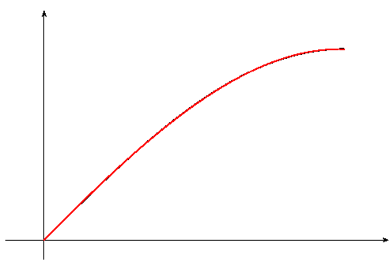
Ukážeme na grafu a na tabulce funkčních hodnot dvě různé aproximace funkce sinus polynomem třetího stupně.



Vlevo je černě graf funkce sinus na intervalu $[0, \pi/2]$ a červeně na stejném intervalu graf polynomu. Nazýváme ho Taylorův polynom a budeme se jím v některé z dalších kapitol zabývat.

$$T : x \mapsto x - \frac{x^3}{6}$$

Na dalším obrázku je podobná situace, tentokrát s interpolačním[5] polynomem.



Grafy se téměř překrývají. Při zvětšení je vidět, jak černý graf přechází několikrát přes červený. Potvrdí se to v tabulce dole.[a]

$$I : x \mapsto -0.114x^3 - 0.066x^2 + 1.023x - 0.0011$$

[a]Koeficienty jsou zaokrouhlené. Rozdíly v tabulce jsou spočítané pro přesnější hodnoty koeficientů.

x	$\sin x$	$T(x)$	$I(x)$	$T(x) - \sin x$	$I(x) - \sin x$
0	0	0.000	-0.001	0	-10^{-3}
0.2	0.199	0.199	0.200	-3×10^{-6}	10^{-3}
0.4	0.389	0.389	0.390	-9×10^{-5}	6×10^{-4}
0.6	0.565	0.564	0.564	-6×10^{-4}	-8×10^{-4}
0.8	0.717	0.715	0.716	-3×10^{-3}	-10^{-3}
1	0.841	0.833	0.841	-8×10^{-3}	-6×10^{-4}
1.2	0.932	0.912	0.933	-2×10^{-2}	9×10^{-4}
1.4	0.985	0.943	0.987	-4×10^{-2}	10^{-3}

V tabulce je v prvním sloupci hodnota proměnné x, ve druhém její funkční hodnota $\sin x$, ve třetím je hodnota Taylorova polynomu $T(x)$, ve čtvrtém hodnoty interpolačního polynomu $I(x)$ a v pátém a šestém jsou hodnoty rozdílů $T(x) - \sin x$, $I(x) - \sin x$. Tyto rozdíly ukazují kvalitu aproximace. Vidíme, že aproximace Taylorovým polynomem je dobrá v okolí bodu nula a ve větší vzdálenosti od bodu nula se zhoršuje. Aproximace interpolačním polynomem je stejně dobrá v celém intervalu. Taylorův polynom proto někdy nazýváme *lokální aproximací* a interpolační polynom *globální aproximací*.

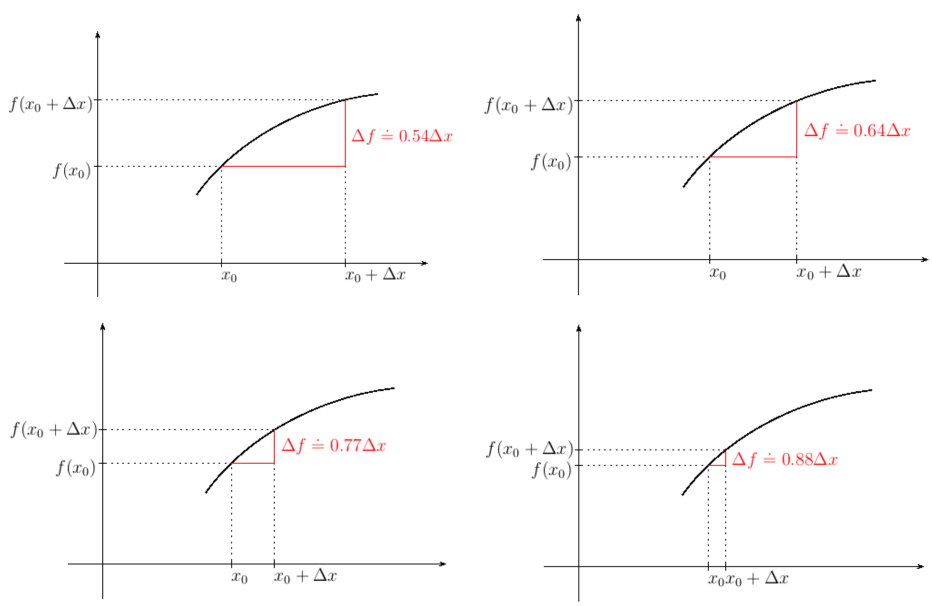
[5]Vybrali jsme čtyři body z intervalu $[0, \pi/2]$ a sestavili polynom mající stejnou funkční hodnotu jako aproximovaná funkce sinus. Více si zvídavý čtenář může přečíst například v [2], v tomto textu se interpolačnímu polynomu věnovat nebudeme.

V textu se budeme podrobněji zabývat lokální aproximací. Nejdříve budeme aproximovat lineární funkcí a ukážeme něco, co je intuitivně jasné, a sice, že nejlepší lineární aproximaci získáme pomocí tečny ke grafu funkce. Později přejdeme k aproximaci polynomem vyššího stupně než jedna.

Otázky. Zamysleli jste se někdy nad tím, jak kalkulačka počítá sinus? Pokud byste měli na výběr některý z interpolačních polynomů, přitom kvůli větší přesnosti bychom použili polynomy vyššího stupně, který byste použili? Šlo by oba polynomy zkombinovat? Jak byste je zkombinovali, aby byla přesnost a rychlost výpočtu[6] co nejlepší?

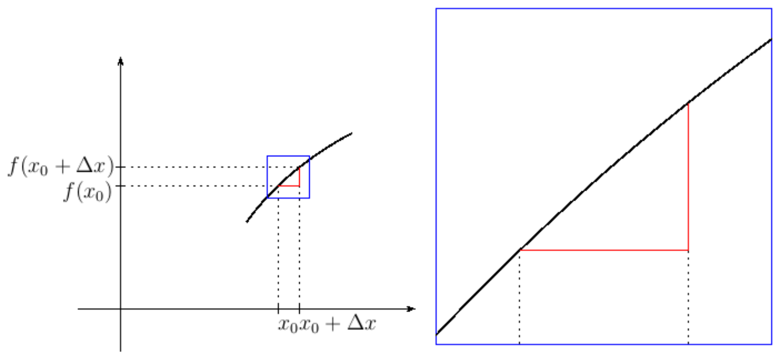
1.6 Derivace

Dalším pojmem je *derivace*, která „malé“ změny proměnných přesněji kvantifikuje. Podívejme se, co se děje s podílem přírůstků funkce a její proměnné $\Delta f/\Delta x$ při zmenšování Δx k nule. Vysvětlíme na funkci, jejímž grafem je oblouček, vezmeme tu z článku 1.2. Na obrázcích je kromě grafu funkce f a bodu x_0 na ose x zobrazen měnící se přírůstek Δx. Dále je na každém obrázku uveden podíl $\Delta f/\Delta x$ zaokrouhlený na setiny.



[6]Čím více členů polynom má, tím déle se počítá jeho funkční hodnota.

Na následujícím obrázku je zobrazen výřez z posledního grafu s nejmenší hodnotou Δx.



Vidíme, že se graf funkce ve výřezu mezi x_0 a $x_0 + \Delta x$ podobá úsečce. To se projeví tím, že se podíl $\Delta f/\Delta x$ málo mění při dalším zmenšování Δx.[7]

V tabulce jsou uvedeny podíly přírůstků v závislosti na přírůstku proměnné, za čarou i pro dále se zmenšující hodnotu přírůstku Δx.[8]

Δx	1.5	1.0	0.5	0.2	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
$\Delta f/\Delta x$	0.54	0.64	0.77	0.88	0.92	0.94	0.95	0.96	0.96

Vidíme, že se hodnoty podílu „ustalují“ na 0.96. Podíl $\Delta f/\Delta x$ má pro Δx blížící se k nule limitu rovnu tomuto číslu. Tuto limitu nazýváme *derivací funkce v bodě* x_0.

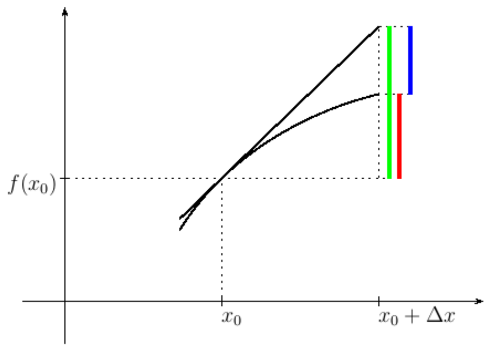
Přímku procházející bodem $[x_0, f(x_0)]$, na které jsou přírůstky Δy, Δx přímo úměrné a derivace je konstanta této úměrnosti, budeme nazývat *tečnou ke grafu funkce v bodě* x_0.[9] Označíme-li derivaci v bodě x_0 symbolem D, má tato tečna rovnici

$$y = D(x - x_0) + f(x_0) \tag{1.3}$$

[7] Je-li grafem opravdu úsečka, je přírůstek Δf přímo úměrný přírůstku Δx a uvedený podíl je tedy konstantní. Pro podrobnosti odkazujeme na kapitolu 5, dodatek o přímé úměře.

[8] Pro případ, že by chtěl čtenář uvedenou tabulku přepočítat, mu prozradíme předpis funkce $\sqrt{6x - x^2 - 4} + 0.06(x-1)^2 - 0.5$ a bod $x_0 = 1.5$.

[9] Když mluvíme o chování funkce v bodě, například o tečně v bodě, máme na mysli bod na ose x charakterizovaný jedním reálným číslem. V grafu pak toto chování znázorňujeme zpravidla v bodě o dvou souřadnicích $[x, f(x)]$.



Na obrázku je graf funkce s tečnou a barevně vyznačenými přírůstky.

Červeně je vyznačen přírůstek funkce Δf.

Zeleně je vyznačen přírůstek na tečně, budeme ho značit $\mathrm{d}f$ a nazývat *lineární částí přírůstku funkce*.

Z podrobnosti trojúhelníků plyne pro proměnné Δx (tedy nejen to na obrázku nakreslené)

$$\mathrm{d}f/\Delta x = D.$$

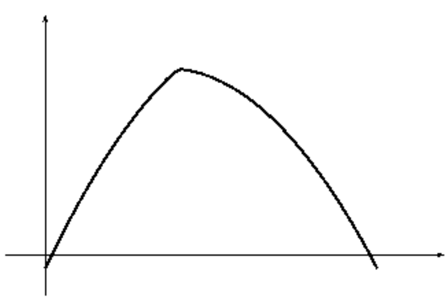
Modře je vyznačen rozdíl přírůstků $\mathrm{d}f - \Delta f$.

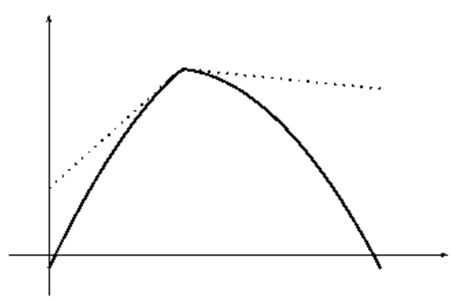
Výše jsme se zmiňovali, že tečna je grafem lokální aproximace funkce. Rozdíl $\mathrm{d}f - \Delta f$ je pak chybou takové aproximace. Ze vztahů $\mathrm{d}f/\Delta x = D$, $\Delta f/\Delta x \doteq D$ plyne

$$\frac{\mathrm{d}f - \Delta f}{\Delta x} \doteq 0. \tag{1.4}$$

V kapitole o derivaci tento vztah budeme interpretovat: chyba aproximace $\mathrm{d}f - \Delta f$ je pro malé hodnoty Δx ve srovnání s Δx zanedbatelná.

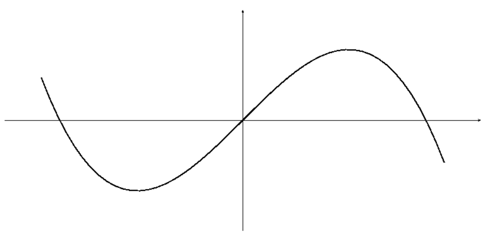
Uvedeme ještě několik příkladů. Na následujících obrázcích nás zajímá bod, v němž je graf „zlomený“. Podíl přírůstků $\Delta f/\Delta x$ vpravo od tohoto bodu se liší od podílu vlevo. Graf funkce nemá v tomto bodě tečnu a funkce nemá v tomto bodě derivaci. Na obrázku vpravo jsou ke grafu tečkovaně dokresleny „polotečny“ na obě strany.

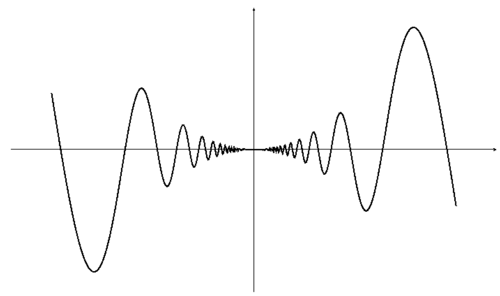




Podobným příkladem je funkce absolutní hodnota: $x \mapsto |x|$ v bodě nula.

V dalších příkladech ukážeme, že tečna ke grafu funkce tak, jak jsme ji definovali, nemusí mít obvyklý geometrický význam. Její hlavní význam vyjadřuje vztah (1.4). Na obou obrázcích dole nás zajímá tečna ke grafu funkce v počátku soustavy souřadné. Z geometrie jste zvyklí, že například kružnice leží celá na jedné straně své tečny. Na obrázku vlevo tomu tak není a tečna protíná graf v tečném bodě. Na obrázku vpravo je tečnou osa x, protože vyhovuje aproximační vlastnosti (1.4) a nevadí, že v okolí tečného bodu graf tečnu mnohokrát[10] protne.





1.7 Nekonečně malé veličiny

Pojem derivace funkce pochází od sira Isaaca Newtona (1642 – 1727) a Gottfrieda Wilhelma Leibnize (1646 – 1716). Pojmy spojitosti funkce (Bolzano 1817) a limity funkce (Weierstrass 1874) jsou o víc jak sto let mladší. Pánové Newton a Leibniz za derivaci považovali podíl nekonečně malých přírůstků funkční hodnoty a proměnné funkce.

Nekonečně malý přírůstek proměnné x označíme $\mathrm{d}x$. Jemu odpovídá nekonečně malý přírůstek funkční hodnoty $\mathrm{d}y = f(x + \mathrm{d}x) - f(x)$. Pro funkci $x \mapsto x^2$ dostaneme

$$\mathrm{d}y = (x + \mathrm{d}x)^2 - x^2 = 2x\,\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)^2.$$

Odtud dostaneme podíl

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x\,\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)^2}{\mathrm{d}x} = 2x + \mathrm{d}x$$

Přírůstek $\mathrm{d}x$ je nekonečně malý, proto za něj dosadíme nulu. Dostaneme derivaci funkce $x \mapsto x^2$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$$

[10]Dokonce nekonečněkrát, předpis funkce je $x \mapsto x^2 \sin(1/x)$. Srojvejte s grafem funkce $x \mapsto x \sin(1/x)$ uvedeným v 1.3

Ve výpočtu je rozpor: výrazem dx nejdříve dělíme a pak za něj dosadíme nulu. S tímto rozporem se matematici dlouhé roky vyrovnávali konceptem nekonečně malé nenulové veličiny, kterou chápali intuitivně. Teprve v dobách Bolzana a Weierstrasse matematici začali používat pojmy spojitosti a limity k vyřešení tohoto rozporu.

1.8 WolframAlpha

Na webu www.wolframalpha.com si můžete nechat vykreslit grafy elementárních funkcí. Klíčové slovo je `plot`. Vyzkoušejte

```
plot(x sin(1/x))
plot(x sin(1/x), (x,0,0.1))
plot(x^2, x^4, x^6)
plot(sin(x)/x)
plot(2^(1/x))
```

Grafy berte jako užitečnou ilustraci, ale mějte na paměti, že jsou vykreslovány z vypočítaných funkčních hodnot a někdy takový způsob některé vlastnosti funkce zkreslí. Podívejte se třeba na graf funkce $x \mapsto e^{\operatorname{cotg} x}$ na intervalu $[\pi/4, \pi]$ a zamyslete se nad průnikem grafu s osou x.

```
plot(exp(cot(x)), (x, PI/4, PI))
```

Jedním z cílů tohoto textu je vyložit, jak získat zajímavé body grafu výpočtem. WolframAlpha vám pak může sloužit jako kontrola vašich výpočtů, nebo jako vodítko, které vaše výpočty nasměruje, nevíte-li si s nimi rady. Při výkladu budeme WolframAlpha používat pro znázornění probíraných pojmů.

1.9 Elementární funkce

Dalším naším cílem bude definování elementárních funkcí a zkoumání jejich vlastností.

Začneme funkcemi, k jejichž definici stačí aritmetické operace. Patří mezi ně *polynomy*, možná je znáte pod názvem mnohočleny, a podíly polynomů, ty budeme nazývat *racionální funkce*.

Řekneme si něco o kořenech polynomů a o rozkladu polynomu na součin kořenových činitelů. Tyto pojmy by vám měly být povědomé pro kvadratické polynomy. My je budeme uvažovat i pro polynomy vyššího stupně.

Předpokládáme, že čtenář umí sčítat racionální funkce, my si ukážeme opačnou operaci, a sice rozklad racionální funkce na součet jednodušších racionálních funkcí, těm budeme říkat *parciální zlomky*. Řekneme si, jak ze jmenovatele racionální funkce určit jmenovatele parciálních zlomků, například

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2-1} &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1} \\ \frac{x^2+2x+3}{x(x^2+1)} &= \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1} \end{aligned}$$

a ukážeme si, jak se spočítají hodnoty čísel A, B případně C.

Další funkce, kterými se budeme zabývat, jsou odmocniny. Ukážeme si, že existence odmocnin není úplně samozřejmá a že souvisí s vlastností reálných čísel, o které budeme mluvit v kapitole o číslech.

V kapitole o spojitých funkcích pak ukážeme, že funkce definovaná na intervalu, která je na něm spojitá a navíc buď rostoucí nebo klesající má inverzní funkci, jejíž definiční obor je opět interval. Tato vlastnost nám pak bude sloužit při definování dalších inverzních funkcí, a sice logaritmů a cyklometrických funkcí.[11]

Probereme vlastnosti mocninných funkcí. Budeme je budovat postupně pro exponent, který je přirozené číslo, nula, celé číslo, racionální číslo. Vysvětlíme si přitom, že vztahy

$$x^0 = 1 \qquad x^{-1} = 1/x \qquad x^{1/2} = \sqrt{x} \tag{1.5}$$

jsou důsledkem přirozeného požadavku, aby vztah

$$a^{m+n} = a^m a^n, \tag{1.6}$$

který odvodíme pro exponenty $m, n \in \mathbb{N}$ platil i pro $m, n \in \mathbb{R}$.

Od mocninných funkcí přejdeme k funkcím exponenciálním. Vztahy (1.5) nám umožní pro $a > 0$ definovat funkci $q \mapsto a^q$ pro $q \in \mathbb{Q}$. Z množiny

[11] Mezi cyklometrické funkce patří arkussinus, arkuskosinus, arkustangens a arkuskotangens. Na kalkulačce jsou obvykle značeny jako $\sin^{-1}$, $\tan^{-1}$ a je dobré si pamatovat, že „na mínus prvou“ neoznačuje mocninu.

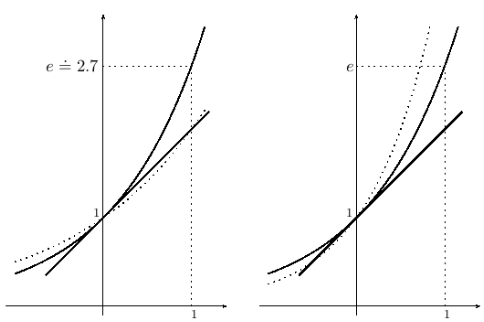
racionálních čísel pak exponenciální funkci spojitě rozšíříme na množinu reálných čísel.

V [2] je symbolem exp označena exponenciální funkce se základem $e \doteq 2.718$. Je zde definovaná vztahy

$$(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})(\exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1)\exp(x_2)) \tag{1.7}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exp(x) \geq 1 + x) \tag{1.8}$$

Přitom (1.7) je jen jinak napsaný vztah (1.6). Vztah (1.8) určuje mimo jiné základ exponenciální funkce, viz následující obrázky.



Na obou obrázcích je plnou čarou graf funkce exp s přímkou o rovnici $y = x+1$. Nerovnost (1.8) se na grafu projeví tím, že se graf exponenciální funkce přímky dotýká a mimo bod dotyku leží nad přímkou.

Tečkovaně jsou na obrázcích grafy s jiným základem. Na obrázku vlevo $x \mapsto 2^x$, na obrázku vpravo $x \mapsto 4^x$.

Je vidět, že osu y oba tečkované grafy protínají pod jiným úhlem než přímka a leží tedy částečně pod ní. Exponenciální funkce se základem 2 případně 4 tedy nesplňují (1.8).

Ukážeme si později, že vztah (1.8) navíc zajišťuje spojitost exponenciální funkce a tím i jednoznačné rozšíření z racionálních na reálné exponenty.

Budeme definovat logaritmus jako funkci inverzní k exponenciální funkci a budeme používat značení běžné v matematické literatuře – symbolem log budeme značit logaritmus se základem e, který znáte pod názvem přirozený logaritmus. S dekadickým logaritmem se v matematické literatuře setkáváme zřídka.

Exponenciální funkci při obecném kladném základu pak definujeme pomocí exponenciální a logaritmické funkce vztahem $a^x = \exp(x \log a)$.

Připomeneme trigonometrickou definici goniometrických funkcí, zobecnění pro jiné než ostré úhly na jednotkové kružnici a odvodíme součtové vzorce pro sinus a kosinus. Řekneme si, že se goniometrické funkce dají definovat pomocí součtových vzorců podobně jako funkce exponenciální v (1.7), (1.8), ale více se tomuto způsobu věnovat nebudeme a odkážeme případného zájemce na [2]. Vystačíme s definicí na jednotkové kružnici a odvozenými součtovými vzorci.

Kapitola 2

Čísla

2.1 Racionální čísla

Zamyšlení. Co je to racionální číslo?

Pokud odpovíte, že zlomek, je třeba říct, co tím myslíte. Je $\pi/2$ zlomek? Pokud ano, je $\pi/2$ racionální číslo? Pokud ne, tak co je to zlomek?

V [1] je popisována tzv. první krize matematiky ve starověkém Řecku. Řečtí učenci věřili, že je každá dvojice úseček *souměřitelná*, což znamená, že jsou jejich délky celistvým násobkem určité společné jednotkové délky. Označíme-li tuto základní délku d a má-li první úsečka délku m-násobnou, tedy md a druhá úsečka délku n-násobnou, tedy nd, pak je poměr délek obou úseček roven m/n.

Pokud by tedy byla každá dvojice úseček souměřitelná, pak zvolíme některou úsečku jako jednotkovou a každá další má délku rovnu poměru dvou celých čísel. Takový podíl nazýváme *racionálním číslem.* Racionální od slova *ratio*, neboli podíl. Význam slova racionální, česky rozumný, je pravděpodobně odvozen právě od slova ratio a víry v rozumnost délek vyjádřených poměrem.[1]

Krize matematiky přišla s objevem, že úhlopříčka čtverce o jednotkové straně má délku odmocnina ze dvou a ta není racionálním číslem.

Věta o odmocnině. Odmocnina ze dvou není racionální číslo.

[1] Přiznávám, že si tento příběh víceméně domýšlím. Možná jsem někdy dřív něco takového někde četla, ale nedokážu si vzpomenout kde. Poznámkou o ratiu a racionalitě se snažím motivovat studenty zapamatovat si definici racionálního čísla. Občas se zděšením zjistím, že s tím mají problém. A tak se kvůli tomu dopouštím bájení.

Důkaz provedeme sporem. Budeme předpokládat, že naše tvrzení neplatí, tedy že existují přírozená čísla m, n splňující $(m/n)^2 = 2$ a odvodíme spor, tedy něco, co nemůže být pravda. Odtud usoudíme, že náš výchozí předpoklad nemůže platit, a tedy platí tvrzení věty.

O číslech m, n budeme navíc předpokládat, že nejsou obě sudá. Pokud by byla obě sudá, tak bychom ve zlomku m/n pokrátili dvěma nebo vhodnou mocninou dvou a dostali zlomek, který nemá i čitatele i jmenovatele sudého.

Ze vztahu $(m/n)^2 = 2$ po úpravě odvodíme $m^2 = 2n^2$. Protože je pravá strana sudá, musí být sudá i levá strana. Odtud plyne, že je m sudé. Kdyby nebylo sudé, tedy bylo liché, tedy bychom ho mohli zapsat ve tvaru $m = 2k-1$ s přirozeným k, pak by bylo $m^2 = 4(k^2 - k) + 1$, a tedy by m^2 bylo liché.

Víme tedy, že je m sudé. Proto ho můžeme zapsat pomocí přirozeného l ve tvaru $m = 2l$. Odtud je $m^2 = 4l^2$. Dosazením do $m^2 = 2n^2$ dostaneme $4l^2 = 2n^2$, pokrátíme na $2l^2 = n^2$ a stejnou úvahou jako výše odvodíme, že je n sudé. A to je slibovaný spor a důkaz zde končí. $\square$

2.2 Vlastnosti reálných čísel

Máme na mysli vlastnosti (1) až (13) vypsané v [2] na stranách 20, 21 a 25. Poznamenejme, že jsou zde vlastnosti nazývány axiomy. Budeme tato slova[2] zaměňovat, protože nepředpokládáme, že čtenář zná rozdíl mezi nimi. Dokonce zatím rezignujeme na snahu tento rozdíl vysvětlit. Omezíme se na diskuzi ve třídě, ze které snad nějaké vysvětlení vzejde. Konstatujme jen, že pochopit, čím se liší, je těžké, nicméně čtenář mající ambici pochopit, čím se liší matematika od pouhého počítání, by měl o rozdílu přemýšlet.

Vlastnosti (1) až (9) jsou čtenáři dobře známé. Ukážeme na příkladu, jak je používáme při řešení rovnic.

Příklad. Ze vztahu mezi proměnnými $xy + 2x + y = 5$ chceme vyjádřit proměnnou y v závislosti na proměnné x.

Vztah (2), asociativitu sčítání, jsme použili k vypuštění závorek, které nyní doplníme: $xy + (2x + y) = 5$.
Použijeme (1), komutativitu sčítání: $xy + (y + 2x) = 5$.
Použijeme (2), asociativitu sčítání: $(xy + y) + 2x = 5$.
Použijeme (7), existenci jednotkového prvku: $(xy + y \cdot 1) + 2x = 5$.
Použijeme (5), komutativitu násobení: $(xy + 1 \cdot y) + 2x = 5$.

[2]Slova vlastnosti a axiomy.

Použijeme (9), distributivní zákon: $(x+1)y+2x=5$.
Použijeme (4), existenci opačného prvku k $2x$: $(x+1)y+2x+(-2x) = 5+(-2x)$. Na levé straně jsme nenapsali závorky – použili jsme asociativitu sčítání.
Použijeme (4), vlastnost opačného prvku: $(x+1)y+0=5+(-2x)$.
Použijeme (3), vlastnost nulového prvku: $(x+1)y=5+(-2x)$.
Použijeme (5), komutativitu násobení: $y(x+1)=5+(-2x)$.

Nyní bychom rádi použili (8), vlastnost inverzního prvku k $x+1$. To můžeme udělat v případě $x+1 \neq 0$, tedy pro $x \neq -1$.
Dostaneme $y(x+1)(x+1)^{-1} = (5-2x)(x+1)^{-1}$.

Použijeme (8), vlastnost inverzního prvku: $y \cdot 1 = (5+(-2x))(x+1)^{-1}$.

Použijeme (7), vlastnost jednotkového prvku: $y = (5+(-2x))(x+1)^{-1}$.

Pro $x=-1$ vyřešíme rovnici $y(x+1)=5+(-2x)$ dosazením: $0=7$.

Závěr:
Pro $x=-1$ nemá rovnice žádný kořen[3].
Pro $x \neq -1$ má jeden kořen $y = (5+(-2x))(x+1)^{-1}$.

Poznámka o odčítání a dělení. Všimněte si, že vlastnosti se týkají pouze operací sčítání a násobení. Operace odečítání a dělení jsou skryté v axiomech opačného a inverzního prvku. Odečítání $a-b$ je zkrácený zápis pro součet $a+(-b)$. Dělení a/b je zkrácený zápis pro součin ab^{-1}.

V příkladu bychom pak místo $y = (5+(-2x))(x+1)^{-1}$ napsali $y = (5-2x)/(x+1)$. V dalším textu budeme tento zápis používat.

Poznámka o umocňování. Další operací odvozenou od násobení jsou mocniny s přirozeným exponentem. Viz následující definice.

Definice. Nechť je $a \in \mathbb{R}$. Pod symbolem a^1 budeme rozumět číslo o hodnotě a, tedy $a^1 = a$. Pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ budeme pod symbolem a^n rozumět číslo o hodnotě $a^{n-1}a$, tedy $a^n = a^{n-1}a$.

Úkoly.

1. Rozmyslete si, jak z výše uvedené definice plynou vám známé vztahy $a^2 = aa$, $a^3 = aaa$, $a^4 = aaaa$, $\ldots$.

2. Odvoďte z axiomů vzorce $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$.

Na příkladu nerovnice ukážeme použití vlastností (12).

[3] Někdy říkáme, že rovnice nemá řešení.

Příklad. Chceme vyřešit nerovnici $3x + 4 < 0$.
Použijeme první vztah vlastnosti (12), úpravu nerovnosti přičtením čísla -4 k oběma stranám. Dostaneme: $3x < -4$.
Použijeme druhý vztah vlastnosti (12), vynásobení nerovnosti kladným číslem 3^{-1}. Dostaneme: $x < -4/3$.

Poznámka o algebraických strukturách. V algebře budete probírat algebraické struktury – množiny s operacemi. Důležitou roli bude hrát struktura zvaná *těleso*[4], jehož typickými příklady jsou racionální, reálná a komplexní čísla s operacemi sčítání a násobení. Těleso budete definovat jako množinu se dvěma operacemi, které splňují vlastnosti (1) až (9).

Poznamenejme ještě, že na množině komplexních čísel není definováno uspořádání, proto pro ně nemá smysl uvažovat vlastnosti (10) až (12). Množina racionálních čísel tyto vlastnosti má.

Reálná a racionální čísla se liší až vlastností (13), se kterou se nejspíš čtenář teprve seznamuje a která je náročná na pochopení. Nazýváme ji vlastností suprémа a budeme se jí zabývat v článku 2.4.

V následujícím článku se budeme zabývat dalšími vlastnostmi reálných čísel a ukážeme, že plynou z axiomů (1) až (12).

Poznámka o číslech a názvech. Čtenář by měl být schopný se zmiňovanými vlastnostmi pracovat. Užitečné je pamatovat si jejich názvy a zbytečné pamatovat si jejich čísla. Zde jsme čísla použili jen kvůli snažší dohledatelnosti v [2]. V dalším textu budeme místo čísel používat názvy.

Poznámka o podrobnosti odvozování a důkazů. Předchozí příklady jsme udělali velmi podrobně. Chtěli jsme ukázat, jak obvyklé úpravy rovnic a nerovnic souvisí s axiomy reálných čísel. V dalším budeme stručnější, především proto, abychom výklad příliš „nezahltili“ podrobnostmi. Vždy by však bylo dobré, kdyby čtenář uměl v případě potřeby takové vysvětlení až na axiomy provést. Zvláště takový rozbor doporučujeme v případě pochybností o platnosti použitého nebo odvozeného.

Při kompromisu mezi stručností a přehledností na jedné straně a pečlivostí a úplností na straně druhé se vždy řídíme cílovou čtenářskou skupinou. Proto je potřeba, aby studenti dávali autorce zpětnou vazbu a nebáli se říct, které partie textu jsou pro ně málo srozumitelné.

[4] V [2] je těleso nazýváno polem.

2.3 Další vlastnosti reálných čísel

V [2] je ve tvrzení 1.3.1 uvedeno i s důkazem pravidlo sčítání nerovností. My zde uvedeme pravidlo násobení nerovností.

Lemma o násobení nerovností. Nechť pro kladná čísla a, b, c, d platí $a < b$, $c < d$. Pak platí $ac < bd$.

Důkaz. Vynásobíme nerovnost $a < b$ číslem c: $ac < bc$. Nerovnost $c < d$ vynásobíme číslem b: $bc < bd$.

Na nerovnosti $ac < bc$, $bc < bd$ použijeme tranzitivitu (vlastnost 11). Dostaneme $ac < bd$. □

Z pravidla o násobení nerovností plyne pravidlo o umocňování nerovností, jak ukazuje následující lemma.

Lemma o umocňování nerovností. Nechť pro kladná čísla a, b platí $a < b$ a nechť je $n \geq 2$ přirozené číslo. Pak platí $a^n < b^n$.

Důkaz. Použijeme předchozí lemma a vynásobíme nerovnost $a < b$ samu se sebou. Dostaneme $a^2 < b^2$, tedy závěr[5] lemmatu pro $n = 2$.

Vynásobením nerovnosti $a < b$ s nerovností $a^2 < b^2$ dostaneme nerovnost $a^3 < b^3$, tedy závěr lemmatu pro $n = 3$.

Dalším krokem by bylo vynásobení nerovnosti $a < b$ s $a^3 < b^3$ … a takto bychom mohli postupovat libovolně dlouho.

Můžeme to zkrátit tím, že vynásobíme nerovnost $a < b$ nerovností $a^n < b^n$. Dostaneme nerovnost $a^{n+1} < b^{n+1}$. Ukázali jsme tím, že z platnosti závěru lemmatu pro n plyne jeho platnost pro $n + 1$. Tomu říkáme *indukční krok* a tento způsob důkazu nazýváme *důkazem matematickou indukcí.*[6] □

Poznámka o předpokladu a závěru. Předchozí lemma bylo zformulováno jako implikace: jestliže platí $a < b$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, pak platí $a^n < b^n$.

Výrok $a < b$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ nazýváme *předpokladem* lemmatu, výrok $a^n < b^n$ *závěrem* lemmatu.

Čárky ve výroku $a < b$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ chápeme jako konjunkce $\wedge$ („a zároveň").

Poznámka o matematické indukci. Důkaz *matematickou indukcí* používáme na tvrzení o přirozených číslech. Skládá se ze dvou částí. V jedné části ukážeme platnost tvrzení pro nejmenší číslo, ve druhé takzvaný *indukční krok*.

[5] O předpokladu a závěru se čtenář dočte více v následující poznámce.
[6] O důkazu matematickou indukcí více v následující poznámce.

V indukčním kroku předpokládáme platnost tvrzení pro n a dokazujeme jeho platnost pro $n+1$.

Nejmenší číslo je zpravidla $n = 1$, ale pokud chceme nějaké tvrzení dokázat třeba pro $n \geq 5$, pak je nejmenším číslem $n = 5$.

V [2] si může zvídavý čtenář přečíst o matematické indunkci na stranách 27 až 32.

Čtenář jistě ví, že při násobení nerovnosti záporným číslem se obrací smysl nerovnosti. Zformulujeme a dokážeme tuto vlastnost.

Lemma o násobení nerovnosti záporným číslem. Nechť je $a < b$, $c < 0$. Pak je $ac > bc$.

Důkaz. K nerovnosti $c < 0$ přičteme opačný prvek $-c$. Dostaneme $0 < -c$. Nerovnost $a < b$ vynásobíme kladným číslem $-c$. Dostaneme $a(-c) < b(-c)$.

Níže ukážeme pomocné tvrzení: $a(-c) = -(ac)$. Pak platí i $b(-c) = -(bc)$. Přepíšeme tedy $a(-c) < b(-c)$ na $-(ac) < -(bc)$. K nerovnosti postupně přičteme ac, bc. Dostaneme $bc < ac$.

Dokažme ještě pomocné tvrzení. K důkazu $a(-c) = -(ac)$ stačí ukázat[7], že $a(-c) + ac = 0$. Tady stačí použít na úpravu levé strany rovnosti distributivitu. Dostaneme $a(-c + c) = 0$, což plyne z vlastnosti opačného prvku a z dalšího pomocného tvrzení – cokoliv vynásobíme nulou, dostaneme nulu. □

Poznámka o pomocných tvrzeních a stavbě důkazů. Předchozí důkaz by byl přehlednější, kdybychom lemmatu o násobení nerovnosti záporným číslem předřadili další dvě lemmata a pak se na ně v důkazu odkázali. Tato lemmata by tvrdila:

1. Pro každé $a \in \mathbb{R}$ platí $a \cdot 0 = 0$.

2. Pro každou dvojici $a, b \in \mathbb{R}$ platí $(-a)b = -(ab)$.

V [2] si na straně 22 přečtěte definici neostré nerovnosti. Dokážeme pro ni pravidlo o násobení nerovností.

Lemma o násobení neostrých nerovností. Nechť pro nezáporná reálná čísla a, b, c, d platí $a \leq b$, $c \leq d$. Pak platí $ac \leq bd$.

Důkaz rozdělíme na několik případů. Rozmyslete si, že pokrývají všechny možnosti v předpokladech lemmatu.[8]

[7] Viz vlastnost opačného prvku.

[8] Viz poznámka o předpokladu a závěru.

1. a, b, c, d jsou kladná, $a < b$, $c < d$
   z lemmatu o násobení nerovností plyne $ac < bd$, a tedy i $ac \leq bd$
2. a, b, c, d jsou kladná, $a = b$, $c < d$
   z lemmatu o násobení nerovnosti $c < d$ kladným číslem a plyne $ac < bd$, a tedy i $ac \leq bd$
3. a, b, c, d jsou kladná, $a = b$, $c = d$
   pak je $ac = bd$, a tedy i $ac \leq bd$
4. b nebo d je rovno nule
   z $b = 0$ plyne $a = 0$, a tedy $ac = 0 = bd$, a tedy i $ac \leq bd$; podobně pro $d = 0$
5. b a d jsou kladná a a nebo c je rovno nule
   vynásobíme nerovnost $b > 0$ kladným d a dostaneme $bd > 0$; protože je $ac = 0$, je $bd > ac$, a tedy i $bd \geq ac$

□

V lemmatu o umocňování nerovností jsme dokázali implikaci: jestliže platí $a < b$, pak platí $a^n < b^n$. Ve skutečnosti za uvedených předpokladů (a, b jsou nezáporná čísla) platí ekvivalence. Tu nyní dokážeme.

Lemma o umocňování coby ekvivalentní úpravě. Pro přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ a nezáporná reálná čísla a, b je $a < b$ ekvivalentní s $a^n < b^n$.

Poznámka o specifickém matematickém jazyku. Lemma jsme zformulovali pokud možno jazykem, kterým se běžně vyjadřujeme. Domníváme se, že v tomto případě to nebylo na újmu přesnosti vyjádření. V matematických textech se spíše používá následující jazyk: „nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní $a < b$, $a^n < b^n$“. Při tvrzeních složitějších než je toto lemma je kvůli přesnosti takový jazyk nezbytností.

Důkaz lemmatu o umocňování coby ekvivalentní úpravě. Ekvivalenci dokazujeme jako dvě implikace. Implikaci $a < b \Rightarrow a^n < b^n$ jsme dokázali výše v lemmatu o umocňování nerovností.

Dokážeme implikaci $a^n < b^n \Rightarrow a < b$ obměnou,[9] tedy dokážeme implikaci $a \geq b \Rightarrow a^n \geq b^n$. Pokud je $a = b$, pak je $a^n = b^n$, a tedy je $a^n \geq b^n$. Pokud je $a > b$, pak je $a^n > b^n$, a tedy je $a^n \geq b^n$. □

[9] Implikaci „jestliže neplatí B, pak neplatí A“ nazýváme *obměněnou implikací* k „jestliže platí A, pak platí B“. Například: „jestliže máte z předmětu zkoušku, pak máte z předmětu

Poznámka o implikaci, jejím předpokladu a závěru.
V implikaci $a > b \Rightarrow a^n > b^n$ nazýváme výrok $a > b$ předpokladem, výrok $a^n > b^n$ závěrem.

Všimněte si, že oslabením závěru nepřestává implikace platit – z platnosti $a > b \Rightarrow a^n > b^n$ přímo plyne platnost $a > b \Rightarrow a^n \geq b^n$.

Na druhé straně oslabením předpokladu v platné implikaci můžeme dostat neplatné tvrzení. Implikace $a > b \Rightarrow a^n > b^n$ platí, ale implikace $a \geq b \Rightarrow a^n > b^n$ neplatí.[10]

Úkol. Všímejte si, jaké další vlastnosti reálných čísel používáte a odvoďte je z axiomů.

2.4 Supremum, infimum

Seznamte se z definicí horního odhadu, maxima, dolního odhadu a minima množiny v [2], definice 1.3.4, poznámka 1.3.5.

TODO PŘÍKLADY (Zkratka TODO znamená, že text není kompletní a bude později doplněn.)

Definice 1.3.6 – zdola omezená množina, shora omezená množina, omezená množina.

Definice 1.3.8 – supremum, infimum množiny.

TODO PŘÍKLADY (Zkratka TODO znamená, že text není kompletní a bude později doplněn.)

Lemma o supremu a infimu „oddělených“ množin. Pokud pro dvě množiny $A, B \subseteq \mathbb{R}$ platí

$$(\forall a \in A)(\forall b \in B)(a \leq b)$$

pak platí $\sup A \leq \inf B$.

Doporučení: před čtením důkazu nakreslete číselnou osu a několik prvků množiny A i B splňujících uvedenou vlastnost.

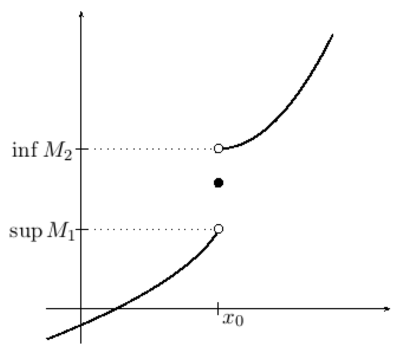
Důkaz. Uvažujme libovolné $b \in B$. Z předpokladů lemmatu plyne, že b je horní závorou množiny A. Supremum množiny A je nejmenší horní závora,

i zápočet“ a „jestliže nemáte z předmětu zápočet, pak z něj nemáte ani zkoušku“. Srovnejte s *obrácenou implikací* „jestliže máte z předmětu zápočet, máte z něj i zkoušku“. Více viz kapitola o jazyku matematiky.

[10] Pokud se rádi s přáteli přete o rozličných tématech, dávejte pozor, zda tyto zásady o oslabení/zesílení předpokladu a závěru v diskuzi vy nebo vaši přátelé dodržujete.

a proto platí $b \geq \sup A$ a platí to pro všechna $b \in B$. Odtud plyne, že $\sup A$ je dolní závora množiny B a odtud plyne $\sup A \leq \inf B$, protože infimum je největší dolní závora. □

Ukážeme si dva případy použití lemmatu.



Uvedený obrázek je z kapitoly věnované limitám funkcí, kde ukazujeme existenci jednostranných limit monotonních funkcí. Na obrázku je graf rostoucí funkce. Nás budou zajímat množiny M_1, M_2 pro malé kladné δ

$$\begin{aligned} M_1 &= \{f(x) : x \in (x_0 - \delta, x_0)\} \\ M_2 &= \{f(x) : x \in (x_0, x_0 + \delta)\} \end{aligned}$$

Je-li funkce f na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ rostoucí, pak platí

$$(y_1 \in M_1, y_2 \in M_2) \Rightarrow y_1 < y_2$$

a z lemmatu o supremu a infimu oddělených množin plyne

$$\sup M_1 \leq \inf M_2 \tag{2.1}$$

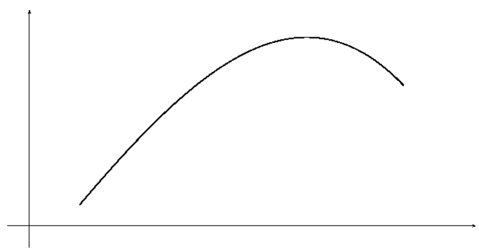
Na obrázku jsou hodnoty $\sup M_1$, $\inf M_2$ vyznačeny na ose y a nerovnost je znázornněna jejich vzájemnou polohou.

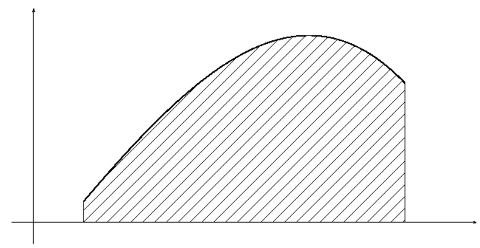
V tomto příkladě můžeme místo lemmatu o supremu a infimu oddělených množin použít hodnotu $f(x_0)$, která je horní závorou množiny M_1 a dolní závorou množiny M_2. Odtud plyne $\sup M_1 \leq f(x_0)$ a $\inf M_2 \geq f(x_0)$ a tedy i nerovnost (2.1).

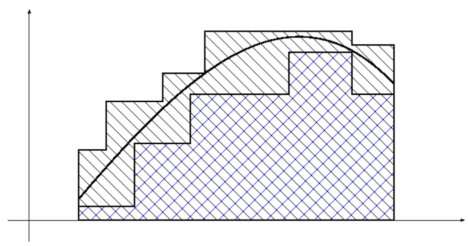
Otázka. Z čeho plyne výše uvedené tvrzení, že je $f(x_0)$ horní závorou množiny M_1 a dolní závorou množiny M_2?

Další dva obrázky se týkají *Riemannova integrálu*. Ten je pro kladnou funkci definován jako obsah plochy[11] pod jejím grafem. Na obrázku vlevo je graf funkce a k němu je na obrázku vpravo vyšrafovaná plocha pod ním.

[11]Terminologická poznámka: na střední škole se zpravidla rozlišuje mezi *plochou* a jejím *obsahem*. Plocha je množina, například čtverec a obsah je číslo. Ve vysokoškolských učebnicích je běžné termínem plocha označovat její obsah, tedy číslo. My se v textu budeme držet středoškolské terminologie.







Její obsah odhadneme zdola a shora obsahem plochy, jejíž obsah umíme spočítat. Jsou to mnohoúhelníky se stranami rovnoběžnými se souřadnými osami, jejich příklady vidíte na obrázku vlevo.

Obsah obdélníků pod grafem (jsou vyšrafovány modře) nazýváme *dolním Riemannovým integrálním součtem*. Obsah obdélníků nad grafem nazýváme *horním Riemannovým integrálním součtem*. Libovolný dolní integrální součet je nejvýše roven hornímu integrálnímu součtu.

Odtud a z lemmatu pak plyne, že supremum dolních integrálních součtů je nejvýše roven infimu horních integrálních součtů. Pokud se sobě rovnají, budeme jejich společnou hodnotu nazývat *riemannovým integrálem* zadané funkce na zadaném intervalu. Ukážeme si, že spojité omezené funkce mají na omezeném intervalu Riemannův integrál. Ukážeme si ale také příklad funkce, jejíž dolní Riemannův integrál je menší než horní Riemannův integrál. Tato funkce tedy nemá Riemannův integrál.

Kapitola 3

Aritmetika a funkce

Budeme se zabývat funkcemi, k jejichž definici stačí aritmetické operace. Jsou to polynomy[1] a podíly polynomů[2]. Na těchto funkcích vyložíme vlastnosti funkcí jako sudost, lichost, monotonii a řekneme, co je obor hodnot funkce.

Dále se budeme zabývat inverzní funkcí. Vysvětlíme, jak souvisí inverzní funkce s rovnicí s parametrem. Speciálně budeme pomocí inverzní funkce definovat odmocniny.

3.1 Mocniny s přirozeným exponentem

Zápis $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\times}$ můžeme chápat jako zkratku. Tato zkratka vede přímočaře k následující definici a^n pro $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$:

$$a^1 = a \quad \text{a pro } n \geq 2 \quad a^n = a \cdot a^{n-1} \tag{3.1}$$

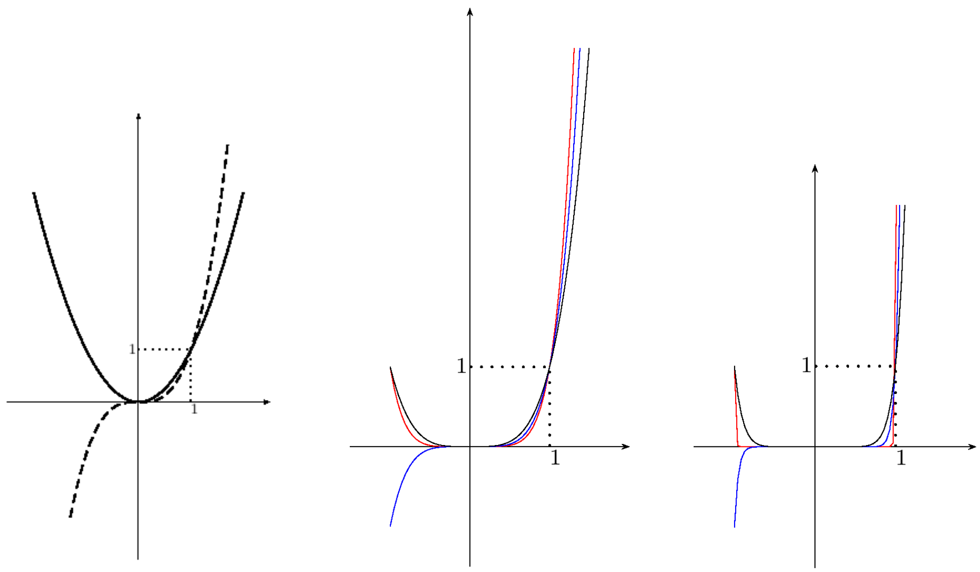
Číslo a nazýváme *základem* mocniny a číslo n *exponentem.*

Funkci $x \mapsto x^n$ nazýváme *mocninnou funkcí.*[3] V celém článku (3.1) budeme uvažovat mocninné funkce jen s kladnými přirozenými exponenty.

3.1.1 Grafy mocninných funkcí

Na následujících obrázcích jsou grafy mocninných funkcí. Vlevo plnou čarou pro exponent $n = 2$ a čárkovanou pro $n = 3$.

[1]Český termín pro polynomy je mnohočleny.
[2]Podíly polynomů nazýváme racionálními funkcemi.
[3]Funkci $x \mapsto a^x$ nazýváme exponenciální funkcí.

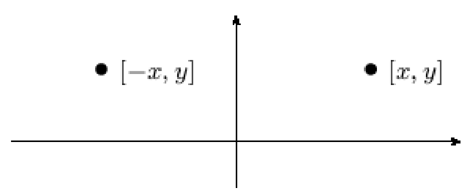


Uprostřed černě pro $n = 4$, modře pro $n = 5$ a červeně pro $n = 6$. Vpravo černě pro $n = 10$, modře pro $n = 21$ a červeně pro $n = 100$.

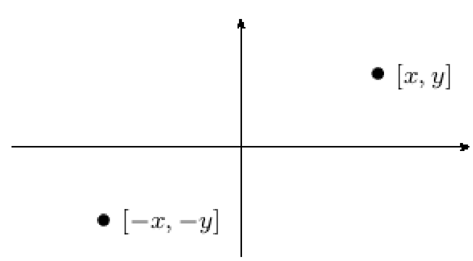
Všechny mocninné funkce jsou definované na množině reálných čísel (tj. jejich definiční obor je $\mathbb{R}$).

3.1.2 Sudost, lichost

Pro sudé n je $(-x)^n = x^n$.
Na grafu se tato vlastnost projeví jako symetrie vzhledem k ose y:
leží-li bod $[x, y]$ na grafu funkce,
pak i bod $[-x, y]$ leží na grafu funkce.



Pro liché n je $(-x)^n = -x^n$.
Na grafu se tato vlastnost projeví jako symetrie vzhledem k počátku:
leží-li bod $[x, y]$ na grafu funkce,
pak i bod $[-x, -y]$ leží na grafu funkce.



Tyto vlastnosti mocninných funkcí vedou k definici sudé a liché funkce.

Definice sudé funkce. Funkci f nazveme *sudou funkcí*, pokud pro každé x

z jejího definičního oboru platí: f je definovaná v $-x$ a $f(-x) = f(x)$.
Po označení definičního oboru funkce f symbolem D definici formálně zapíšeme

$$(\forall x \in D)(-x \in D \wedge f(-x) = f(x))$$

Často místo logické spojky „a zároveň“ $\wedge$ píšeme čárku

$$(\forall x \in D)(-x \in D, f(-x) = f(x))$$

Definice liché funkce. Funkci f nazveme *lichou funkcí*, pokud pro každé x z jejího definičního oboru platí: f je definovaná v $-x$ a $f(-x) = -f(x)$.
Definici formálně zapíšeme

$$(\forall x \in D)(-x \in D, f(-x) = -f(x))$$

3.1.3 Monotonie

V kapitole o číslech 2.3, lemma o umocňování nerovností, jsme ukázali, že pro nezáporná a, b splňující $a < b$ a přirozené kladné n platí $a^n < b^n$. Toto tvrzení lze zapsat pomocí implikace

$$\text{pro kladné přirozené } n \text{ platí } (\forall a, b \in [0, +\infty))(a < b \Longrightarrow a^n < b^n)$$

Níže připomeneme definici funkce rostoucí na množině. Výše uvedený výrok znamená, že mocninná funkce je rostoucí na intervalu $[0, +\infty)$.

Definice rostoucí funkce. Řekneme, že je funkce f *rostoucí na množině* $M \subseteq \mathbb{R}$, pokud platí

$$(\forall x_1, x_2 \in M)(x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2))$$

Ukážeme, že pro lichý exponent je mocninná funkce rostoucí na $\mathbb{R}$. Máme tedy ukázat platnost výroku

$$(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})(x_1 < x_2 \Longrightarrow x_1^n < x_2^n)$$

Rozebereme postupně čtyři případy: 1) $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ 2) $x_1 \in (-\infty, 0)$, $x_2 \in [0, +\infty)$ 3) $x_1 \in [0, +\infty)$, $x_2 \in (-\infty, 0)$ 4) $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$

První případ jsme rozebrali výše.

V druhém případě je pravdivý i předpoklad $x_1 < x_2$ i závěr $x_1^n < x_2^n$ implikace, takže je implikace pravdivá.

Ve třetím případě není pravdivý ani předpoklad ani závěr implikace a implikace je tedy pravdivá.

Rozebereme čtvrtý případ:
Je-li $x_1 < x_2$, je $-x_2 < -x_1$ a $-x_1, -x_2 \in (0, +\infty)$. Protože je mocninná funkce na $(0, +\infty)$ rostoucí, plyne odtud $(-x_2)^n < (-x_1)^n$. Pro lichý exponent upravíme na $-(x_2^n) < -(x_1^n)$ a dále na $x_1^n < x_2^n$.

Proto pro $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ platí implikace $x_1 < x_2 \Longrightarrow x_1^n < x_2^n$.

Úkoly.

1. Ukažte, že pro sudé n platí

$$(\forall x_1, x_2 \in (-\infty, 0])(x_1 < x_2 \Longrightarrow x_1^n > x_2^n)$$

   Funkci splňující tento výrok nazýváme *klesající na množině* $(-\infty, 0]$.

2. Napište definici funkce klesající na množině M.

3.1.4 Obor hodnot

Ze střední školy víte, že mocninné funkce mají pro lichý exponent obor hodnot roven množině reálných čísel a pro sudý exponent množině nezáporných reálných čísel. My se zde zamyslíme, co tato tvrzení znamenají. Nejdříve připomeneme definici oboru hodnot funkce.

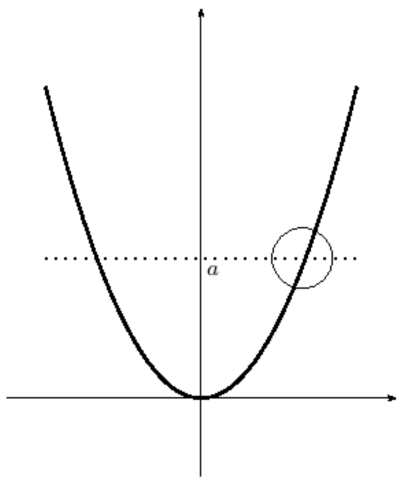
Defince oboru hodnot. Pro funkci f s definičním oborem D nazýváme *oborem hodnot* množinu jejích funkčních hodnot, tedy množinu

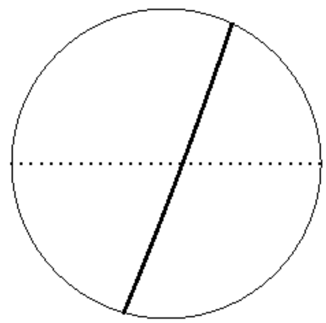
$$H(f) = \{f(x) : x \in D\}$$

Jak zjistíme z grafu funkce, že číslo $a \in \mathbb{R}$ leží v oboru hodnot funkce? Sestrojíme přímku o rovnici $y = a$ a zjistíme, zda má s grafem společný alespoň jeden bod. Pokud ano, pak je a prvkem oboru hodnot funkce.[4]

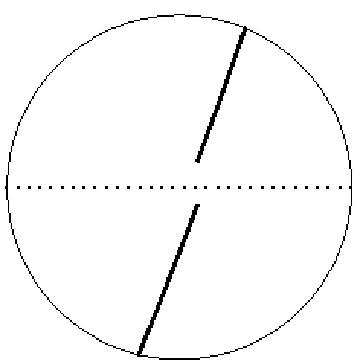
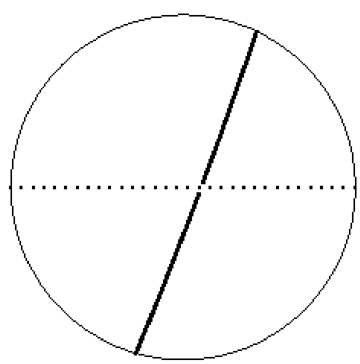
Na obrázku je graf funkce $x \mapsto x^2$ a přímka o rovnici $y = a$ pro $a > 0$. Průsečík grafu[5] a přímky má x-ovou souřadnici vyhovující rovnici $x^2 = a$.

[4] A pokud ne, tak a není prvkem oboru hodnot.
[5] Grafem je parabola.





Na následujících obrázcích bychom rádi zpochybnili samozřejmost existence takových průsečíků. Bude nás zajímat, co se stane, zvětšíme-li výřez s průsečíkem, jako na obrázku vpravo nahoře. Když budeme uvažovat nějaký hmotný objekt, třeba papír, na kterém právě čtete tyto řádky[6], tak z fyziky víte, že pro naše oči a náš hmat pevná hmota se při velkém zvětšení přemění na malinké atomy, které se skládají z ještě mnohem menšího jádra obklopeného prázdnem vyplněným ještě menšími elektrony.[7] Nemůže se stát něco podobného při zvětšení okolí průsečíku?

Na obrázcích je vyznačeno, co by se mohlo při zvětšení stát: na levém je v grafu mezera okolo přímky $y = a$ a přímka tedy s grafem nemá průsečík. Na obrázku vpravo sice mezera není, ale v grafu chybí právě ten bod, ve

[6]případně elektronické zařízení, ze kterého čtete

[7]Zjistěte kolikrát je atomové jádro menší než atom.

kterém by se s ním přímka protnula.

V následujícím textu ukážeme, že pro mocninnou funkci při sebevětším zvětšení ani jeden z obrázků nenastane. Důsledkem bude existence průsečíku a tedy existence odmocniny.

3.1.5 Spojitost

Ukážeme, že v grafu mocninné funkce nemůže vzniknout mezera. Upravíme rozdíl funkčních hodnot

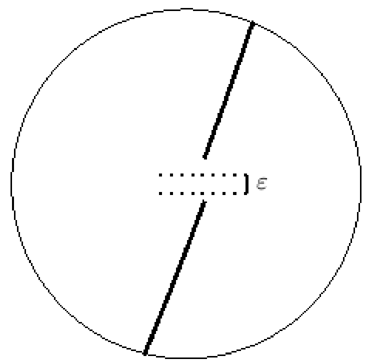
$$b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + ab^{n-2} + \cdots + a^{n-1})$$

Budeme uvažovat a, b z intervalu $I = [0, M]$. Pak je

$$b^{n-1} + ab^{n-2} + \cdots + a^{n-1} \le nM^{n-1}$$

Budeme předpokládat, že $a < b$ a nerovnici vynásobíme kladným rozdílem $b-a$. Dostaneme

$$b^n - a^n \le nM^{n-1}(b-a)$$



Volbou dostatečně malého $b-a$ můžeme udělat $b^n - a^n$ dostatečně malé. Konkrétně pro $b - a = \frac{\varepsilon}{nM^{n-1}}$ dostaneme $b^n - a^n \le \varepsilon$. Proto nemůže nastat situace na obrázku.

Co když je v grafu mezera nulové velikosti? Ukážeme, že taková situace nastane, pokud za čísla považujeme jen čísla racionální a naopak nenastane při použití čísel reálných.

3.1.6 Mocninná funkce na racionálních číslech

Připomínáme, že racionální čísla jsou podíly celých čísel. Mezi racionální čísla patří i čísla celá, například číslo dva můžeme napsat ve tvaru podílu jako $2/1$.

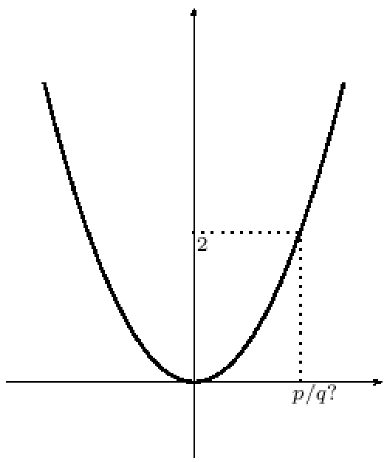
Budeme hledat vzor čísla 2 funkce druhá mocnina v množině racionálních čísel, tedy budeme hledat dvojici celých čísel p, q splňující

$$(p/q)^2 = 2$$

Úpravou dostaneme

$$p^2 = 2q^2$$

Na pravé straně rovnice je sudé celé číslo, proto musí být sudé číslo i na levé straně, a proto musí být i číslo p sudé[8].



Odtud plyne, že lze p vyjádřit jako dvojnásobek celého čísla r

$$p = 2r$$

dosazením $p^2 = 4r^2$ a pokrácením dvěma dostaneme

$$2r^2 = q^2$$

odkud podobnou úvahou plyne, že je je i číslo q sudé.

Došli jsme tedy v závěru, že obě čísla v podílu $p/q = 2$ musí být sudá. To je ale ve sporu s tím, že každé racionální číslo je možné vyjádřit ve zkráceném tvaru tak, že je čitatel nesoudělný s jmenovatelem.

Odtud plyne, že neexistuje dvojice celých čísel splňující $(p/q)^2 = 2$.

3.1.7 Reálná čísla a odmocnina

V minulém odstavci jsme ukázali, že v množině racionálních čísel nemá rovnice řešení, tedy neexistuje racionální číslo q splňující $q^2 = 2$. Z toho důvodu zavádíme reálná čísla. Názorně můžeme reálná čísla definovat pomocí vzájemně jednoznačné korespondence s body na přímce – zadáme na přímce polohu nuly a jedničky, a pak každému bodu na přímce odpovídá právě jedno reálné číslo a každému reálnému číslu odpovídá právě jeden bod na přímce. Takovou korespondenci v matematice nazýváme *vzájemně jednoznačným zobrazením.*

Definice vzájemně jednoznačné funkce – bijekce. Funkci f nazveme *vzájemně jednoznačným zobrazením* množiny $D \subseteq \mathbb{R}$ na množinu $H \subseteq \mathbb{R}$, pokud ke každému $y \in H$ existuje právě jedno $x \in D$ splňující $f(x) = y$ a ke každému $x \in D$ existuje právě jedno $y \in H$ splňující $f(x) = y$. Vzájemně

[8]Kdyby bylo p liché, bylo by liché i p^2.

jednoznačné zobrazení také někdy nazýváme *bijekcí* množiny D na množinu H.

Úloha. Rozmyslete si, že každé vzájemně jednoznačné zobrazení je také prostým zobrazením.

Poznámka. Jiný způsob zavedení reálných čísel je pomocí jejich nekonečného desetinného rozvoje. Upozorněme na překvapivou skutečnost, že zobrazení množiny reálných čísel na množinu nekonečných desetinných rozvojů není vzájemně jednoznačné. Například číslu jedna odpovídají dva různé desetinné rozvoje $1.\overline{0}$ a $0.\overline{9}$.

TODO: SOUVISLOST S VLASTNOSTÍ SUPREMA (Zkratka TODO znamená, že text není kompletní a bude později doplněn.)

3.2 Odmocniny

Definice odmocniny z nezáporného čísla. Pro $a \in [0, +\infty)$ a sudé $n \geq 2$ definujeme *n-tou odmocninu z a* jako nezáporný kořen rovnice $x^n = a$. Značíme ji $\sqrt[n]{a}$. Pro $n = 2$ zpravidla značíme stručněji $\sqrt{a}$ a vynecháváme přívlastek druhá.

Úkoly.

1. Načrtněte graf funkce $x \mapsto x^2$ a určete graficky druhou odmocninu z pěti.

2. Ukažte, že je odmocnina z pěti definovaná jednoznačně a vysvětlete, jak to plyne z monotonie mocninné funkce.

Definice odmocniny lichého stupně. Pro $a \in \mathbb{R}$ a liché $n \geq 3$ definujeme *n-tou odmocninu z a* jako kořen rovnice $x^n = a$. Značíme ji $\sqrt[n]{a}$.

Úkoly.

1. Načrtněte pro vhodné n graf funkce $x \mapsto x^n$ a zvolte reálné číslo a a určete graficky n-tou odmocninu z a. Volte sudé i liché n a ke každému n kladné, záporné i nulové a.

2. Ukažte, že odmocnina je definovaná jednoznačně a vysvětlete, jak to plyne z monotonie mocninné funkce.

3. Načrtněte grafy funkcí $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ pro $n = 2, 3, 4, 5$.

3.3 Inverzní funkce

V předchozím odstavci jsme definovali odmocninu z a jako kořen rovnice $x^n = a$ s neznámou x a parametrem a. Funkci této vlastnosti nazýváme inverzní funkcí.

Definice inverzní funkce. Nechť je zadaná funkce f. Řekneme, že k ní existuje inverzní funkce, pokud má rovnice $y = f(x)$ nejvýše jeden kořen. Funkci, která y přiřadí tento kořen, nazýváme *inverzní funkcí* k funkci f a značíme ji f^{-1}.

V definici inverzní funkce je podstatné, že rovnice $y = f(x)$ má nejvýše jeden kořen. Takovou funkci nazýváme prostou funkcí.

Definice prosté funkce. Funkci f nazveme *prostou funkcí*, pokud pro každou dvojici x_1, x_2 z jejího definičního oboru platí implikace

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

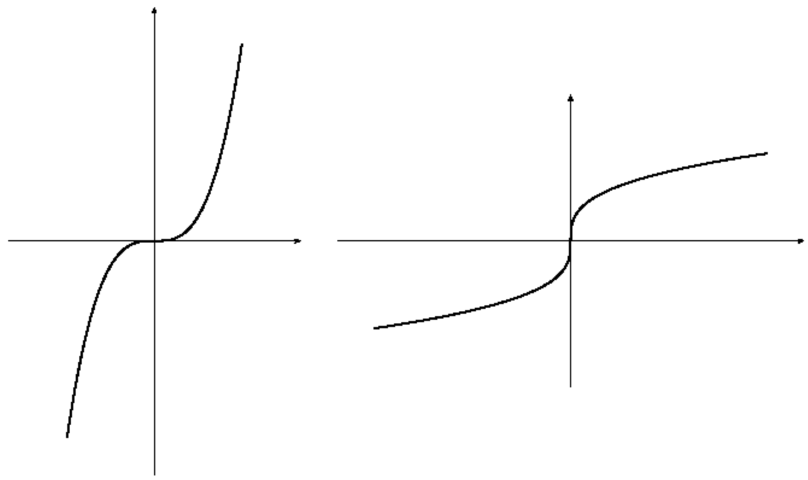
Lemma o jednoznačnosti vzorů prosté funkce. Nechť je funkce f prostá. Pak má rovnice $f(x) = a$ s neznámou x a parametrem a pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ nejvýše jeden kořen.

DŮKAZ. Jsou-li $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ kořeny rovnice $f(x) = a$, pak platí $f(x_1) = f(x_2)$. Protože předpokládáme, že je funkce f prostá, plyne odtud $x_1 = x_2$. Proto má rovnice $f(x) = a$ nejvýše jeden kořen.

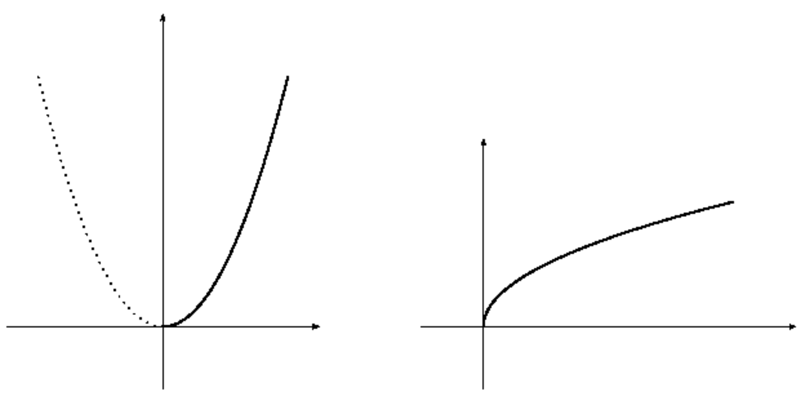
Důsledek. Je-li f prostá funkce, pak má rovnice $f(x) = a$ jeden kořen pro a z oboru hodnot funkce f a nemá žádný kořen pro ostatní a.

3.3.1 Odmocnina jako inverzní funkce

Z minulých odstavců plyne, že funkce třetí odmocnina je inverzní funkcí třetí mocniny. Na obrázcích uvádíme jejich grafy.



Jiné je to v případě druhé odmocniny, protože funkce druhá mocnina nemá inverzní funkci. Změníme-li ale vhodně její definiční obor, pak inverzní funkci mít bude. Na obrázku je plnou čarou graf druhé mocniny se změněným definičním oborem a graf funkce k ní inverzní – druhé odmocniny.



Ještě uvedeme formální definici výše zmíněných pojmů.

Definice zúžené a rozšířené funkce. Pokud pro funkci f s definičním oborem $D(f)$ a funkci g s definičním oborem $D(g)$ platí $D(f) \subseteq D(g)$ a pro všechna $x \in D(f)$ platí $f(x) = g(x)$, pak nazýváme funkci f *zúžením funkce g na množinu $D(f)$*. Značíme $f = g|_{D(f)}$. Funkci g nazýváme *rozšířením funkce f* na množinu $D(g)$.

Příklad. Uvažujme funkce $g : x \mapsto x^2, x \in \mathbb{R}$ (tedy definičním oborem g je množina reálných čísel $\mathbb{R}$) a $f : x \mapsto x^2, x \in [0, +\infty)$ (tedy definičním oborem

f je interval $[0, +\infty)$. Pak je f zúžením g na interval $[0, +\infty)$, formálně zapsáno $f = g|_{[0,+\infty)}$.

Druhá odmocnina je inverzní funkcí k této zúžené funkci.

3.4 Polynomy

TODO: Definice, stupeň, nulový polynom, kořen polynomu, dělení polynomů, rozklad polynomu na kořenové činitele. Nerozložitelné polynomy v oboru komplexních čísel, v oboru reálných čísel. Maximální počet kořenů polynomu, rovnost polynomů. (Zkratka TODO znamená, že text není kompletní a bude později doplněn.)

Nerozložitelné polynomy v komplexním oboru jsou lineární polynomy (viz přednáška z algebry). Nerozlozložitelnými polynomy v reálném oboru jsou i některé kvadratické polynomy – viz články 16.1., 16.2. z dodatku o komplexních číslech.

Otázky. Kolik reálných kořenů může mít kvadratická rovnice? Kolik kubická rovnice? Kolik rovnice s polynomem stupně nejvýše pět s reálnými koeficienty $a_0,\dots,a_5$?

$$a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

Kolik rovnice s polynomem stupně nejvýše n s reálnými koeficienty $a_0,\dots,a_n$?

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

Otázka. Kolik kořenů $x \in \mathbb{R}$ má rovnice v závislosti na hodnotách a, b? Má pro nějaké hodnoty a, b více jak jeden kořen?

$$ax + b = 0$$

Otázka. Který z následujících polynomů nelze v reálném oboru rozložit na součin polynomů nižších stupňů? Takovým polynomům budeme říkat nerozložitelné polynomy.

$$x^2 + x + 1 \qquad x^2 - x - 1 \qquad x^3 + 1 \qquad x^4 + 1$$

Úkol. Upravte polynomy na součin v reálném oboru nerozložitelných polynomů.

$$x^3 + 8 \qquad x^5 - 32 \qquad x^3 + 2x - 3 \qquad x^8 - 1$$

3.5 Racionální funkce

TODO: Definice, ryze lomená racionální funkce. Parciální zlomky, rozklad racionální funkce na součet polynomu a parciálních zlomků. (Zkratka TODO znamená, že text není kompletní a bude později doplněn.)

Úkoly. Vyjádřete výrazy jako součet polynomu a parciálních zlomků.

$$\frac{x^3}{x^2+1} \qquad \frac{-x^2+2}{x^2-1} \qquad \frac{3x^2+x+2}{x^3-4x+3} \qquad \frac{1}{x^3(x^2+1)} \qquad \frac{x^3}{(x^2+x+3)^2}$$

Kapitola 4

Cvičení na funkce a jejich grafy

Cílem této kapitoly je procvičit pojmy vyložené v předchozích kapitolách a především upozornit na jejich vzájemné souvislosti.

4.1 Rovnice s parametrem

Začneme s dvěma funkcemi, jejichž grafy umíme nakreslit

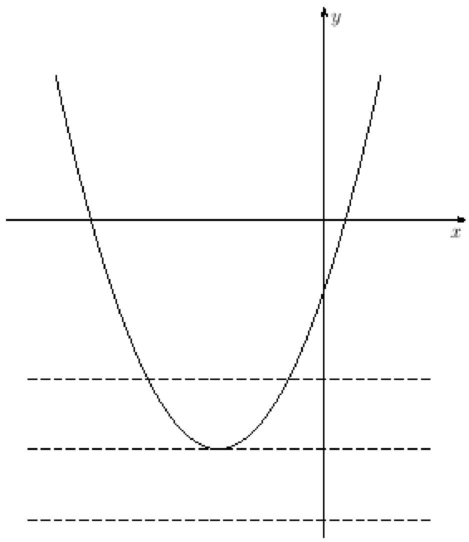
$$g : x \mapsto x^2 + 3x - 1 \qquad h : x \mapsto \frac{x-3}{2x+1}$$

a ukážeme, jak řešit, nejdříve graficky a poté i početně, rovnice s neznámou x a parametrem y. Z výsledků pak určíme obor hodnot funkce a pokud existuje, tak i inverzní funkci.

$$x^2 + 3x - 1 = y \tag{4.1}$$

$$\frac{x-3}{2x+1} = y \tag{4.2}$$

4.1.1 Grafické řešení rovnice s parametrem



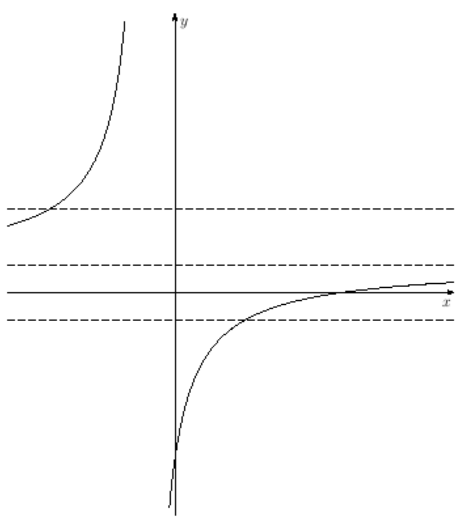
Vlevo jsou spolu s parabolou

$$y = x^2 + 3x - 1$$

čárkovaně přímky o rovnicích

$$y = \text{ konstanta}$$

Hodnoty konstanty na pravé straně rovnice jsme vybrali tak, aby měla rovnice (4.1) dva kořeny, jeden kořen a žádný kořen. Každému z kořenů odpovídá průsečík přímky s parabolou.



Vlevo je k hyperbole

$$y = \frac{x-3}{2x+1}$$

nakreslena asymptota $y = 1/2$. Pro toto ypsilon nemá rovnice (4.2) řešení – přímka (asymptota) se s hyperbolou neprotíná.
Přímky pro ostatní hodnoty ypsilon (na obrázku $y = -1/2$ a $y = 3/2$) se s hyperbolou protínají v jednom bodě.

4.1.2 Početní řešení rovnic s parametrem

Při řešení rovnic budeme postupovat obdobně jako v případě konkrétního čísla na pravé straně rovnice.

U rovnice (4.1) nejdřív převedeme pravou stranu rovnice nalevo

$$x^2 + 3x - 1 - y = 0$$

Dostali jsme kvadratickou rovnici s diskriminantem

$$D = 3^2 - 4(-1 - y),$$

po úpravě

$$D = 13 + 4y$$

Víme, že kvadratická rovnice má dva různé reálné kořeny v případě $D > 0$, tedy v případě $y > -13/4$. Jeden reálný kořen má v případě $D = 0$, tedy $y = -13/4$ a v případě $D < 0$, tedy $y < -13/4$ nemá žádný reálný kořen.

Kořeny vypočteme dosazením do vzorce. Dostaneme

Pro $y > -13/4$ má rovnice kořeny

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{13 + 4y}}{2}$$

Pro $y = -13/4$ má rovnice kořen

$$x = -3/2$$

Pro $y < -13/4$ nemá rovnice žádný kořen.

Výsledek výpočtu se shoduje s grafickým řešením, navíc jsme nalezli souřadnice vrcholu paraboly a tím i obor hodnot funkce g

$$H(g) = [-13/4, +\infty)$$

Rovnici (4.2) vynásobíme jmenovatelem. Dostaneme[1]

$$x - 3 = y(2x + 1)$$

Na pravé straně roznásobíme závorku

$$x - 3 = 2xy + y$$

Výrazy obsahující neznámou x převedeme na levou stranu, ostatní výrazy na stranu pravou a na levé straně vytkneme x

$$x(1 - 2y) = y + 3$$

[1]Po vyřešení rovnice bychom správně měli ověřit, že získaný kořen splňuje i rovnici před úpravou – tedy že $x \neq -1/2$, pro které má jmenovatel nulovou hodnotu. Zde si stačí uvědomit, že pro $x = -1/2$ je $x - 3 \neq 0 = y(2x + 1)$.

Pro $1-2y=0$, tedy $y=1/2$ dostaneme rovnici $0=7/2$, která nemá řešení. Pro ostatní y dostaneme kořen rovnice vydělením nenulovým výrazem $1-2y$

Výsledek tedy shrneme konstatováním, že pro $y\neq 1/2$ má rovnice jeden kořen

$$x=\frac{y+3}{1-2y}$$

a pro $y=1/2$ nemá žádný kořen.

Výsledek výpočtu se shoduje s grafickým řešením, navíc jsme nalezli předpis inverzní funkce

$$h^{-1}: y\mapsto \frac{y+3}{1-2y}, \qquad y\in\mathbb{R}\setminus\left\{\tfrac{1}{2}\right\}$$

4.2 Další příklady na rovnice s parametrem

V kapitole 4.1 jsme řešili rovnice s parametrem jednoduché natolik, že jsme je uměli vyřešit početně i graficky a výsledky jsme porovnali. Zde se budeme věnovat složitějším rovnicím a graf, který uvedeme na závěr, odvodíme z našeho výpočtu. Úmyslně volíme takové funkce, při kterých budeme řešit kvadratickou rovnici s parametrem.

4.2.1

$$y=\frac{x^2-3x+1}{x+2}$$

Rovnici vynásobíme jmenovatelem, vechny členy převedeme na jednu stranu a upravíme do tvaru kvadratické rovnice. Dostaneme

$$x^2+x(-y-3)+(1-2y)=0 \tag{4.3}$$

Diskriminant této kvadratické rovnice je

$$D=(-y-3)^2-4(1-2y)$$

a po úpravě

$$D=y^2+14y+5$$

Počet kořenů rovnice (4.3) dostaneme vyřešením kvadratické rovnice $D=0$ a nerovnice $D>0$.

Pro $y = -7 \pm \sqrt{44}$ má rovnice (4.3) jeden kořen. Dosazením do vzorce pak dostaneme, že tento kořen je $x = (y+3)/2$, a tedy

$$\begin{array}{llll} \text{pro} & y_1 = -7 + \sqrt{44} & \text{je} & x_1 = -2 + \sqrt{11} \\ \text{pro} & y_2 = -7 - \sqrt{44} & \text{je} & x_2 = -2 - \sqrt{11} \end{array}$$

Pro $y \in (-\infty, -7 - \sqrt{44}) \cup (-7 + \sqrt{44}, +\infty)$ má rovnice (4.3) dva kořeny

$$x = \frac{y + 3 \pm \sqrt{y^2 + 14y + 5}}{2}$$

Pro ostatní y rovnice nemá řešení.

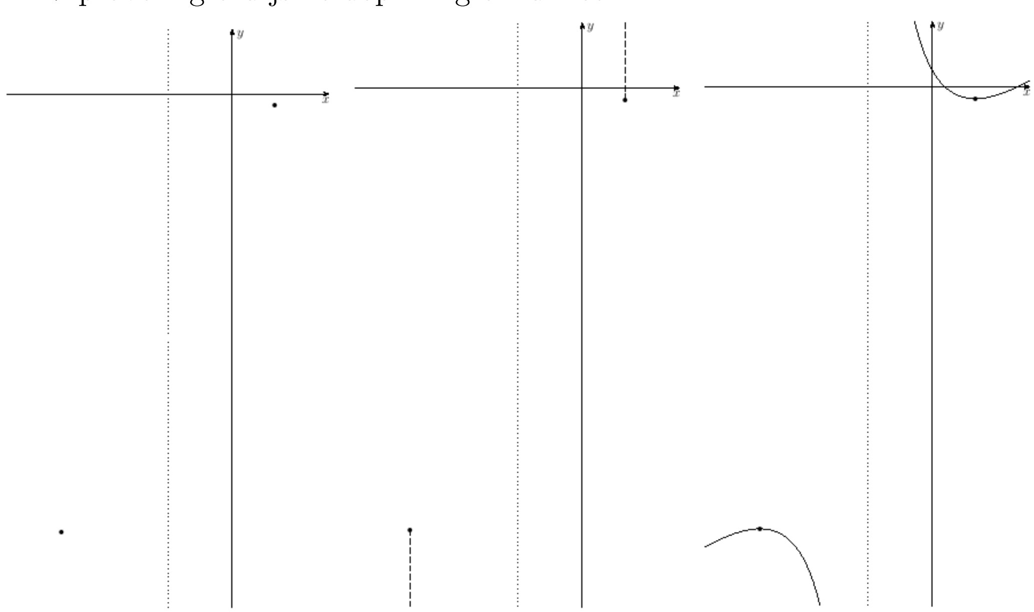
Z našich výpočtů zjistíme, že funkce není prostá, nemá tedy inverzní funkci a její obor hodnot je $(-\infty, -7 - \sqrt{44}] \cup [-7 + \sqrt{44}, +\infty)$. Pomocí $y_{1,2}$ tento obor hodnot zapíšeme $(-\infty, y_2] \cup [y_1, +\infty)$.

Výsledky ještě postupně vyneseme do grafu.

V grafu vlevo jsme vyznačili body $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$ a tečkovaně přímku $x = -2$ (pro tuto hodnotu není funkce definovaná, graf proto vyznačenou přímku neprotíná).

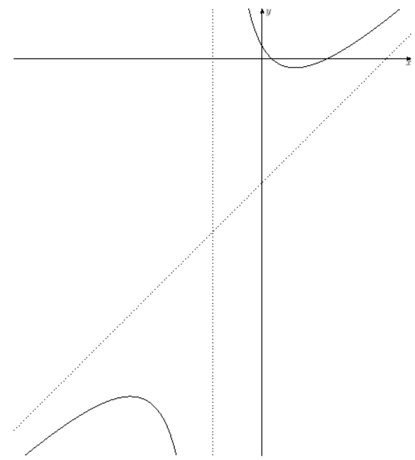
V prostředním grafu jsme dále čárkovaně vyznačili y ležící v oboru hodnot funkce.

V pravém grafu jsme doplnili graf funkce.



Přesnější graf získáme vydělením

$$\frac{x^2-3x+1}{x+2} = x-5+\frac{11}{x+2}$$



Do grafu dokreslíme přímku o rovnici $y = x - 5$.
Pro velká kladná x je $11/(x+2)$ malé kladné, a tedy graf funkce leží malý kousek nad touto přímkou.
Pro velká záporná x je $11/(x+2)$ malé záporné, a tedy graf funkce leží malý kousek pod touto přímkou.
Pro úplnost uveďme, že grafem je v tomto případě hyperbola.

4.2.2

$$y = \frac{x}{x^2+1}$$

První úprava rovnice je obdobná jako v minulém příkladě.

$$yx^2 - x + y = 0 \tag{4.4}$$

Pro $y = 0$ dostáváme rovnici $-x = 0$ s jedním kořenem.
Pro $y \neq 0$ dostáváme kvadratickou rovnici s diskriminantem

$$D = 1 - 4y^2$$

Rovnice $D = 0$ je splněná pro $y_1 = 1/2$ a pro $y_2 = -1/2$, nerovnice $D > 0$ je splněná pro $y \in (-1/2, 1/2)$. Kořeny kvadratické rovnice dostaneme dosazením do vzorce.

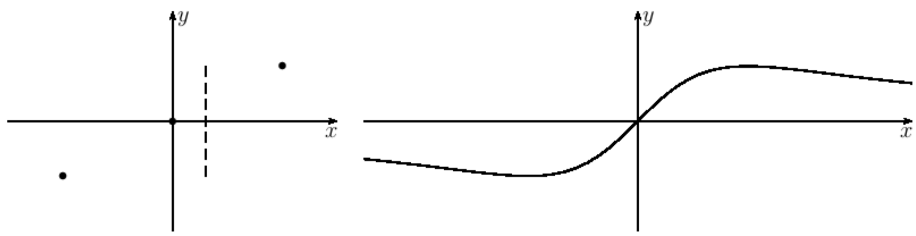
Rovnice tedy má

$$\begin{array}{l}
\text{pro} \quad y = -1/2 \quad \text{kořen} \quad x = -1 \\
\text{pro} \quad y \in (-1/2, 0) \quad \text{kořeny} \quad x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4y^2}}{2y} \\
\text{pro} \quad y = 0 \quad \text{kořen} \quad x = 0 \\
\text{pro} \quad y \in (0, 1/2) \quad \text{kořeny} \quad x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4y^2}}{2y} \\
\text{pro} \quad y = 1/2 \quad \text{kořen} \quad x = 1
\end{array}$$

Pro ostatní y rovnice nemá řešení.

Odvodíme odsud, že funkce není prostá a nemá tedy inverzní funkci a její obor hodnot je $[-1/2, 1/2]$.

Výsledky opět vyneseme postupně do grafu.



Na obrázku vlevo jsme vynesli tři body grafu a čárkovaně vyznačili obor hodnot. Na pravém obrázku je graf funkce.

4.3 Limity

Při kreslení grafu v příkladu 4.2.1 jsme vydělili mnohočleny

$$\frac{x^2 - 3x + 1}{x + 2} = x - 5 + \frac{11}{x + 2} \tag{4.5}$$

a pomohli si dále úvahou o hodnotách zlomku $11/(x + 2)$ pro x blízké mínus dvěma nebo velké kladné i záporné.

Později zavedeme pojem limity a budeme říkat, že
hodnota výrazu $11/(x + 2)$ se pro x blížící se

ke dvěma zprava se blíží k plus nekonečnu
ke dvěma zleva se blíží k mínus nekonečnu
k plus nekonečnu se blíží k nule
k mínus nekonečnu se blíží k nule

Nebo také budeme říkat, že limita výrazu . . . je pro x jdoucí k . . . rovna . . .

Formálně budeme x blížící se ke dvěma zprava zapisovat $x \to 2^+$ a x blížící se ke dvěma zleva $x \to 2^-$. Podobně x blížící se k plus nekonečnu zapíšeme $x \to +\infty$ a k mínus nekonečnu $x \to -\infty$.

Výroky napsané výše slovně pak zapíšeme: $11/(x+2) \to +\infty$ pro $x \to 2^+$, a podobně ostatní.

Podobně bychom v příkladu 4.2.2 mohli upravit

$$\frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{x + \frac{1}{x}}$$

a odtud usoudit, že pro velká x budou funkční hodnoty malé kladné a pro velká záporná x budou malé záporné a říkat tedy, že limita tohoto výrazu je pro x jdoucí k plus a mínus nekonečnu rovná nule.

V další kapitole budeme zkoumat funkce

$$x \mapsto \frac{x^2+2x}{x^2-1} \tag{4.6}$$

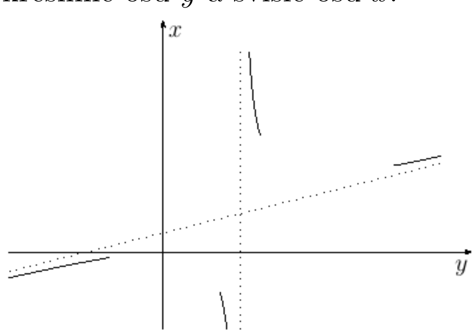
$$y \mapsto \frac{y^2}{4y-2} \tag{4.7}$$

Rozebereme zde chování těchto funkcí v okolí kořenů jmenovatele a v okolí obou nekonečen.

Při zkoumání funkce z (4.7) začneme úpravou

$$\frac{y^2}{4y-2} = y^2 : (4y-2) = \frac{1}{4}y + \frac{1}{8} + \frac{1}{16y-8}$$

Protože je zde y nezávisle proměnná, prohodíme osy, tedy vodorovně nakreslíme osu y a svisle osu x.



Na obrázku vlevo je tečkovaně nakreslená přímka $x = y/4 + 1/8$ a přímka $y = 1/2$. Plnou čarou je vyznačena závislost x na y na základě úvahy: k $y/4 + 1/8$ přičítáme $1/(16y-8)$ a to je pro $y \to -\infty$ malé záporné, pro $y \to 1/2^-$ velké záporné, pro $y \to 1/2^+$ velké kladné a pro $y \to +\infty$ malé kladné.

Při zkoumání funkce z (4.6) spočítáme limity zprava a zleva v bodech ± 1 a $\pm\infty$.

Pro x o málo větší než jedna je čitatel x^2+2x zhruba roven třem a jmenovatel je kladný s hodnotou blízkou nule. Zlomek má tedy velkou kladnou hodnotu. Formálně tuto úvahu zapíšeme: $\frac{x^2+2x}{x^2-1} \to +\infty$ pro $x \to 1^+$

Pro $x \to 1^-$ je jmenovatel malý záporný, a proto $\frac{x^2+2x}{x^2-1} \to -\infty$.

Graf pro x hodně velká ($x \to +\infty$ a $x \to -\infty$) získáme následující úvahou: zlomek rozšíříme výrazem $1/x^2$ (stejnou úpravu lze udělat vytknutím

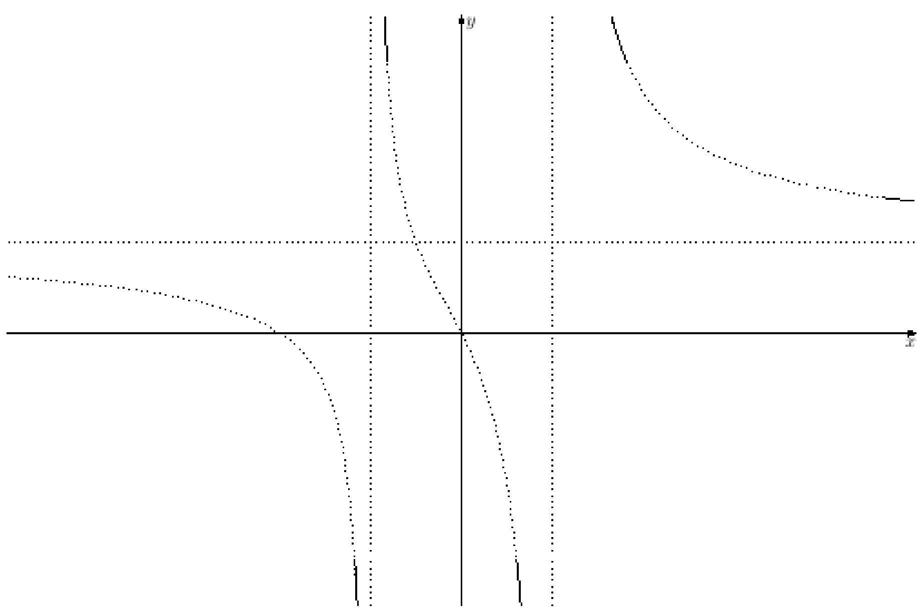
x^2) a upravíme

$$\frac{x^2+2x}{x^2-1} = \frac{\frac{1}{x^2}(x^2+2x)}{\frac{1}{x^2}(x^2-1)} = \frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}$$

Pro velká x je čitatel i jmenovatel přibližně roven jedné, tedy $\frac{x^2+2x}{x^2-1} \to 1$.

Pro velká kladná x ještě můžeme doplnit: čitatel je o trochu větší než jedna a jmenovatel o trochu menší než jedna, proto má zlomek hodnotu o trochu větší než jedna. Pro x velká záporná obdobnou úvahu nelze provést, dělíme dvě čísla o trochu menší než jedna a výsledek tedy může být i větší i menší než jedna.

Na následujícím obrázku jsou plnými čarami znázorněny výsledky našich úvah.



Ze spojitosti vyšetřované funkce plyne, že rovnice (4.8) má pro libovolné číslo y kořen $x \in (-1, 1)$. Pro $y < 1$ má pak ještě jeden kořen $x \in (-\infty, -1)$ a pro $y > 1$ kořen $x \in (1, +\infty)$. Kořenů může být i více, pokud by funkce nebyla na uvedených intervalech monotonní.

V následující kapitole ukážeme, že kořenů více není. Zjistíme tak, že je funkce na intervalech $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$ klesající a její graf tedy vypadá jako výše uvedená tečkovaná křivka.

4.4 Další příklady na rovnice s parametrem

4.4.1

Probereme funkci, jejíž limity jsme spočítali v předchozí kapitole. Řešení rovnice s parametrem nám pomůže části grafu spojit.

$$y = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1} \tag{4.8}$$

Začneme obdobnými úravami jako v předchozích příkladech

$$x^2(y-1) - 2x - y = 0$$

Pro $y = 1$ dostáváme rovnici $-2x - 1 = 0$ s kořenem $x = -1/2$.
Pro $y \neq 1$ dostáváme kvadratickou rovnici s diskriminantem

$$D = 4 + 4y(y-1)$$

který nabývá kladných hodnot pro všechny reálné hodnoty y. Rovnice má tedy pro $y \neq 1$ dva kořeny

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{y^2 - y + 1}}{y - 1}$$

Z výpočtů plyne, že obor hodnot funkce je množina reálných čísel $\mathbb{R}$, funkce není prostá a nemá tedy inverzní funkci.

Graf jsme uvedli nahoře včetně úvah opírajících se o výsledky výpočtu.

Úkol. Nechte WolframAlpha vykreslit grafy funkcí

$$x \mapsto \frac{1 + \sqrt{x^2 - x + 1}}{x - 1} \qquad x \mapsto \frac{1 - \sqrt{x^2 - x + 1}}{x - 1}$$

a porovnejte s výše uvedeným grafem.

Návod. Použijte příkaz Plot((1+sqrt(x*x-x+1))/(x-1)).

4.4.2

Uvedeme ještě jeden příklad, ve kterém při řešení rovnice budeme umocňovat. Vysvětlíme, proč se o takové úpravě říká, že není ekvivaletní. Dále v příkladě zopakujeme pojmy prostá a inverzní funkce a souvislosti.

$$y = 2x + \sqrt{4x^2 - 2x}$$

Osamostatníme odmocninu a umocníme

$$\begin{aligned} y - 2x &= \sqrt{4x^2 - 2x} && (4.9) \\ (y - 2x)^2 &= 4x^2 - 2x && (4.10) \\ y^2 - 4xy + 4x^2 &= 4x^2 - 2x \end{aligned}$$

Všimněte si, že kvadratický člen $4x^2$ se odečte a dostaneme lineární rovnici

$$\begin{aligned} y^2 &= 4xy - 2x \\ y^2 &= x(4y - 2) \\ x &= \frac{y^2}{4y - 2} \end{aligned}$$

Pro $y = 1/2$ nemůžeme udělat poslední úpravu. Pro toto y má rovnice před úpravou tvar $1/4 = 0$, nemá tedy řešení. Pro $y \neq 1/2$ jsme dostali kořen $x = y^2/(4y - 2)$.

Během řešení rovnice jsme při úpravě (4.9) na (4.10) umocňovali. V případě, že se strany rovnice před úpravou liší znaménkem, například $L = y - 2x = -2$, $P = \sqrt{4x^2 - 2x} = 2$, není rovnice splněna. Po úpravě rovnice splněna je $(y - 2x)^2 = (-2)^2 = 4$, $4x^2 - 2x = 2^2 = 4$. Umocňování tedy může rozšířit množinu kořenů rovnice a je třeba ověřit, zda kořeny rovnice (4.10) vyhovují i rovnici (4.9). Obvykle ověřujeme dosazením kořenů do rovnice (zkouškou). My zde ukážeme jiný způsob ověření. Využijeme následující tvrzení (lemma).

Lemma. Pokud pro čísla $L, P \in \mathbb{R}$ platí $L^2 = P^2$, pak je buď $L = P$ nebo $L = -P$.

Důkaz je jednoduchý. $L^2 = P^2$ upravíme na $L^2 - P^2 = 0$ a dále na $(L - P)(L + P) = 0$ a odtud plyne, že buď je $L - P = 0$ nebo $L + P = 0$ a odtud plyne požadované tvrzení. □

V našem případě je $P = \sqrt{4x^2 - 2x} \geq 0$. Proto stačí zjistit, zda je i $L = y - 2x \geq 0$. Potom nemůže nastat případ $L = -P$ a tedy z $L^2 = P^2$ plyne $L = P$.

Zjistěme tedy, zda platí $L \geq 0$. Dosazením a úpravami dostaneme

$$L = y - 2x = y - \frac{2y^2}{4y - 2} = y - \frac{y^2}{2y - 1} = \frac{y^2 - y}{2y - 1}$$

Vyřešením nerovnice $(y^2-y)/(2y-1) \geq 0$, dostaneme[2] $y \in [0, 1/2) \cup [1, +\infty)$.

ZÁVĚR: rovnice má pro $y \in [0, 1/2) \cup [1, +\infty)$ kořen $x = y^2/(4y-2)$. Pro ostatní y nemá rovnice řešení.

Ještě jsme výše slíbili vysvětlit, proč používáme termín (ne)ekvivaletní úprava. Jak souvisí úprava s ekvivalencí? Při úpravách rovnice chceme, aby množina kořenů rovnice před úpravou byla totožná s množinou kořenů rovnice po úpravě. Pro konkrétní hodnotu proměnné se můžeme na každou z rovnic dívat jako na výrok. A rovnost množin kořenů znamená, že jsou výroky *ekvivalentní*. Odtud název ekvivalentní úprava.

Řešením rovnice jsme získali inverzní funkci k funkci[3]

$$f : x \mapsto 2x + \sqrt{4x^2 - 2x}, \quad x \in (-\infty, 0] \cup [1/2, +\infty) \tag{4.11}$$

Touto inverzní funkcí je[4]

$$f^{-1} : y \mapsto \frac{y^2}{4y-2}, \quad y \in [0, 1/2) \cup [1, +\infty)$$

Našim dalším cílem je načrtnout grafy funkce f i inverzní funkce f^{-1}.

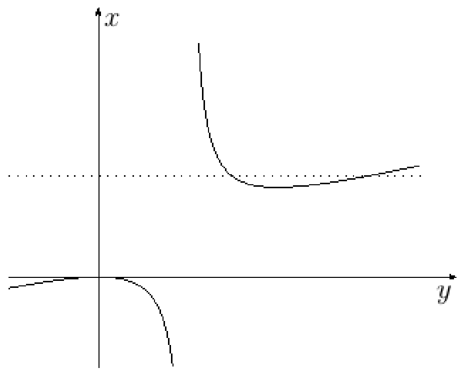
Začneme inverzní funkcí f^{-1}. V minulé kapitole jsme spočítali limity jejího rozšíření na množinu $\mathbb{R} \setminus \{1/2\}$.

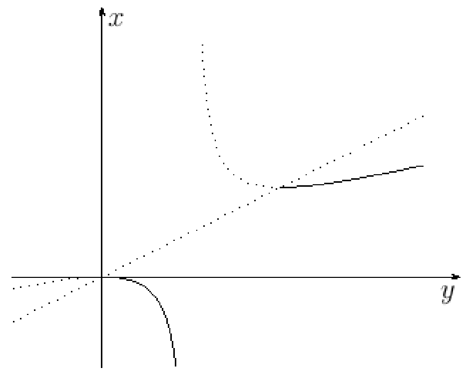
$$g : y \mapsto \frac{y^2}{4y-2}$$

a vynesli je do grafu. Vlevo dole jsme ho znovu nakreslili a tečkovanou přímkou znázorňili, že funkce g není prostá. Inverzní funkce f^{-1}, která je zúžením funkce g, prostá je. Pojďme vytvořit její graf.

Definiční obor funkce f^{-1} jsme získali z podmínky $y \leq 2x$. Na obrázku vpravo jsme tuto podmínku vyřešili graficky a řešení znázornili plnou čarou.

[2] Vyřešení této nerovnice necháme na čtenáři.
[3] Definiční obor jsme určili z podmínek – odmocňujeme jen nezáporná čísla.
[4] Zde jsou definičním oborem ta y, pro něž má rovnice $y = f(x)$ řešení.

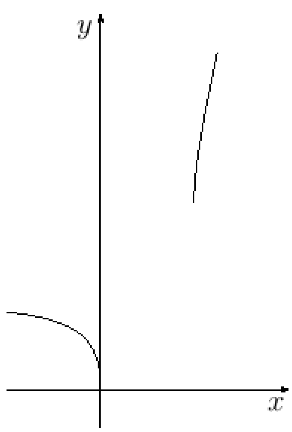


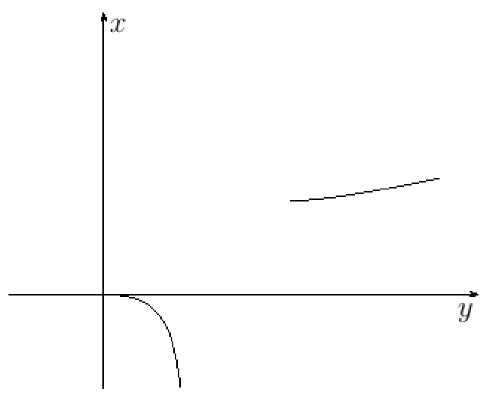


Sestrojený graf inverzní funkce lze považovat za plnohodnotný graf funkce f – pokud se v něm jako v grafu funkce f dokážeme orientovat. To si ověříme v následujícím cvičení.

Úkol. Zvolte v grafu funkce f^{-1} bod na ose x a na ose y vyznačte pro toto x hodnotu $f(x)$.

Pokud se vám nelíbí prohozené osy, můžete je vyměnit zpět. Na následujících obrázcích je vlevo graf funkce f a vpravo graf funkce k ní inverzní.[5]



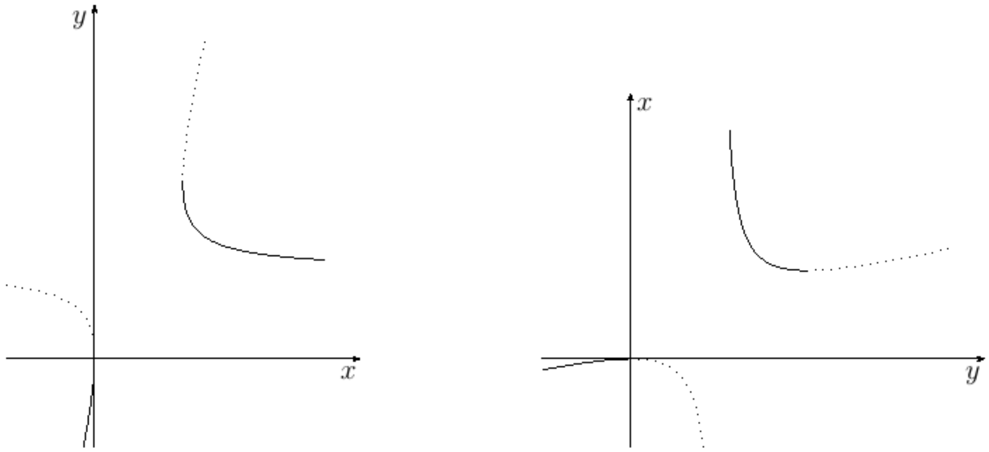


Úkol. Vyřešte stejnou úlohu pro funkci h s opačným znaménkem před odmocninou

$$h : x \mapsto 2x - \sqrt{4x^2 - 2x}$$

[5]Pokud funkce f přiřadí proměnné x proměnnou y, pak inverzní funkce přiřadí naopak proměnné y proměnnou x. Na základních a středních školách je zpravidla vyžadováno u inverzní funkce přejmenování, my je zde neděláme, považujeme je za nepřínosné a naopak spíše matoucí.

a ukažte, že se liší jen znaménkem levé strany L před umocněním rovnice, a tedy graf funkce h a funkce h^{-1} k ní inverzní je[6]



[6] tečkovaně jsou zakresleny grafy funkcí f, f^{-1}

Kapitola 5

Dodatek – rovnice přímky

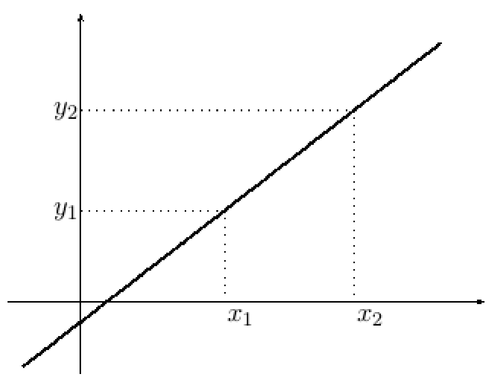
Pravděpodobně víte, že grafem lineární funkce $f : x \mapsto ax + b$ je přímka. Víte ale proč tomu tak je?

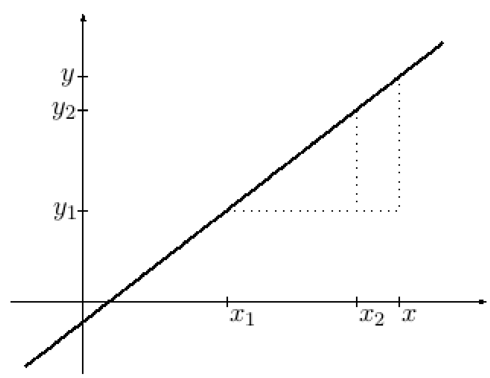
5.1 Rovnice přímky a podobnost trojúhelníků

Začneme zkoumáním, jakou rovnici má přímka určená dvěma body.

Nejdřív probereme případ bodů se stejnou x-ovou souřadnicí, tedy bodů $[x_1, y_1]$, $[x_1, y_2]$. Přímka jimi určená je kolmá k ose x, není grafem žádné funkce a má rovnici $x = x_1$.

Dále probereme případ bodů, kdy je druhý vpravo nahoře od prvního Pro jejich souřadnice platí $y_2 > y_1$, $x_2 > x_1$.





Vlevo jsou znázorněny takové dva body a vpravo jsme do obrázku přidali další bod přímky a tečkovaně jsme vyznačili dva podobné pravoúhlé trojúhelníky. Větší z nich má odvěsny délek $x - x_1$, $y - y_1$, ten druhý délek $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$.

A z podobnosti trojúhelníků plyne

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{5.1}$$

Hodnotu výrazů v (5.1) nazýváme *směrnicí přímky*. Označíme ji k a vyjádříme pomocí souřadnic bodů na přímce

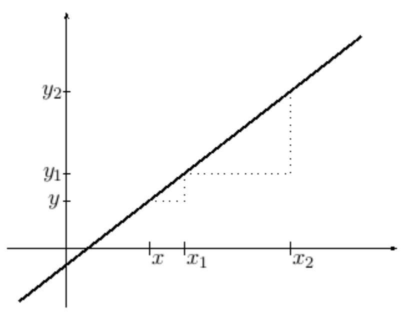
$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{5.2}$$

Rovnici přímky pak můžeme zapsat ve tvaru

$$y = y_1 + k(x - x_1) \tag{5.3}$$

Úlohy. Ze vztahů (5.1), (5.2) odvoďte vztah (5.3).
Napište rovnici přímky procházející body [2, 1], [4, 5].

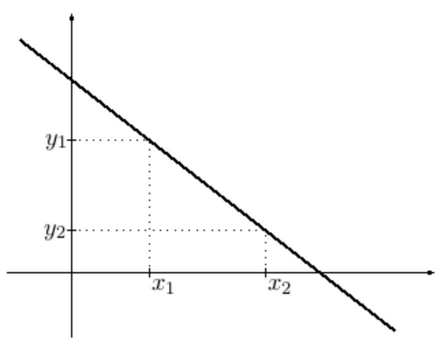
Výše jsme odvodili vztahy pro speciální polohu bodů. Na dalších obrázcích ukážeme, že odvozené vztahy platí i v obecné poloze.

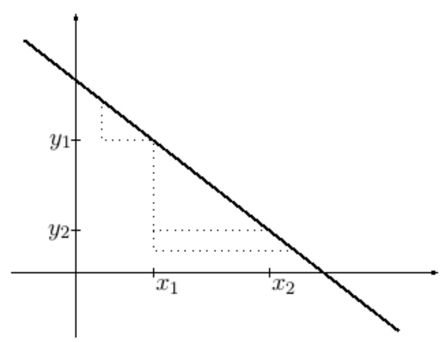


Uvažujme bod $[x, y]$ vlevo od bodu $[x_1, y_1]$. Z podobnosti trojúhelníků dostaneme

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

což je ekvivalentní vztahu (5.1).





Na obrázku vlevo jsou body splňující $x_1 < x_2$, $y_1 > y_2$. K nim jsou na obrázku vpravo zvoleny další dva body a čárkovaně dokresleny podobné trojúhelníky. Pro bod vlevo platí

$$\frac{y - y_1}{x_1 - x} = \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1},$$

pro bod vpravo

$$\frac{y_1 - y}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1}.$$

Obě rovnosti upravíme vynásobením mínus jedničkou na (5.1).

Poslední případ je $y_1 = y_2$. Přímka je rovnoběžná s osou x a má rovnici $y = y_1$. Rozmyslete si, že tuto rovnici dostaneme jako speciální případ výše uvedených vztahů.

Závěr. Přímka určená dvěma různými body $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$ má v případě $x_1 = x_2$ rovnici $x = x_1$ a v případě $x_1 \neq x_2$ rovnici (5.3), kde za k dosadíme číslo vypočtené z (5.2).

5.2 Geometrický význam koeficientů

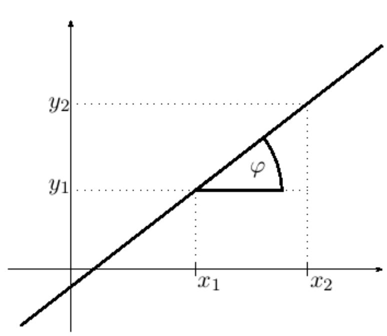
Odvodíme geometrický význam koeficientů a, b v rovnici $y = ax + b$.

Dosazením $x = 0$ dostaneme $y = b$. Proto protíná přímka o rovnici $y = ax + b$ osu y v bodě $[0, b]$.

Pro zjištění geometrického významu koeficientu a budeme potřebovat dva body přímky. Jejich souřadnice splňují rovnice $y_1 = ax_1 + b$, $y_2 = ax_2 + b$. Odečtením rovnic dostaneme $y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$ a po další úpravě

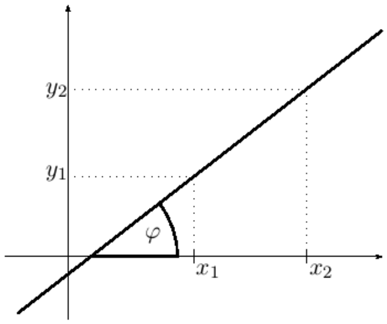
$$a = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) \tag{5.4}$$

tedy vztah (5.2), který jsme výše odvodili geometricky. Na následujících obrázcích ukážeme geometrický význam čísla a.



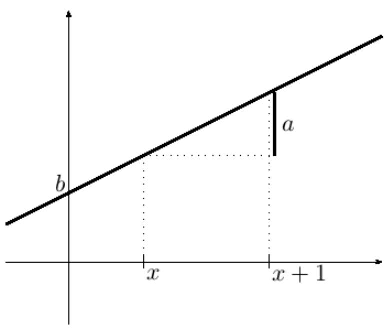
Na obrázku je vyznačen úhel φ v pravoúhlém trojúhelníku s tečkovanými odvěsnami a plnou přeponou. Ve vztahu (5.4) jsou v čitateli a jmenovateli velikosti odvěsen, odkud dostaneme

$$a = \operatorname{tg} \varphi$$



Protože přímka svírá s rovnoběžkami stejný úhel, dostáváme význam koeficientu u x: je roven tangentu úhlu, který svírá přímka s osou x.[a]

[a]Pro přímku v obecné poloze je to úhel od kladné poloosy proti směru hodinových ručiček k přímce. V geometrii uvažujeme mezi přímkami vždy ostrý nebo pravý úhel, zde však záporné směrnici a odpovídá tupý úhel φ.



Na obrázku jsme zvolili přírůstek proměnné x roven jedné. Pak je koeficient a roven odpovídajícímu přírůstku y.
Zároveň jsme na ose y vyznačili absolutní člen b.

5.3 Graf lineární funkce

Ukázali jsme, že každá přímka má rovnici buď $x =$ konstanta nebo (5.3).

Úloha. Diskutujte, zda odtud plyne, že každá rovnice (5.3) je rovnice přímky.

Literatura

[1] Jindřich Bečvář and Martina Bečvářová. Vývoj matematiky jako popularizující stimul.
www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/oppa/matematika_stimul_blok.pdf.

[2] Jiří Veselý. Základy matematické analýzy.
www.karlin.mff.cuni.cz/~jvesely/ma11-12/MA_I/ppma.pdf.

Rejstřík