Úlohy na spojitost a limity

1. Předveďte, že rozumíte definici spojitosti – načrtněte graf funkce f a ukažte, že je/není v bodě $x_0 = 2$ spojitá, tj., že v tomto bodě splňuje/nesplňuje definici spojitosti.

$$f : x \mapsto \begin{cases} 5 - x^2 & x \in [0, 2] \\ 3 + x & x \in (2, 3] \end{cases}$$

2a Určete definiční obor funkce f a zjistěte, zda ji lze spojitě rozšířit a případně jakou hodnotou.

$$f : x \mapsto \frac{(x^2 - 9)(-2 + \sqrt{x + 2})}{(x^2 - 5x + 6)(1 + \sqrt{x^2 - 1})}$$

2b

$$f : x \mapsto \frac{(x^2 - 6x + 8)}{(x^2 - 2x)(3 - \sqrt{x + 5})}$$

2c

$$f : x \mapsto \frac{2x^2 + 5x + 2}{\sqrt{x^2 + 5} - 3}$$

2d

$$f : x \mapsto \frac{(x^2 - 4)^3(x^2 - 3x + 2)}{(x - 2)^4}$$

*2e

$$f : x \mapsto \frac{(\sqrt{x + 5} - 2)^6}{(x^3 + x^2 - x - 1)^3}$$

*2f

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$$

3a Řešte nerovnici

$$2x - 5 < \sqrt{x + 1}$$

3b

$$\sqrt{7 - 3x} > x - 1$$

3c

$$\sqrt{x^2 + 8} \leq 2x + 1$$

4. Ukažte, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

5. Napište tvrzení (důsledek věty o kořeni spojité funkce), na kterém je založeno řešení nerovnic.

6. Předpokladem tvrzení z předchozí úlohy je spojitost obou stran nerovnice. Vysvětlete, z čeho tato spojitost plyne.