

První úlohy z funkcí

grafy, rovnice, inverzní funkce, obor hodnot, definiční obor, úpravy, limity

1. Nakreslete křivky zadané rovnicemi a určete, zda jsou grafem funkce se vzorem $x \in \mathbb{R}$ a obrazem $y \in \mathbb{R}$. Určete případně definiční obor a obor hodnot této funkce.

(a) $x + y = 1$

(b) $x^2 + y = 0$

(c) $x + y^2 = 0$

(d) $x^2 + y^2 = 1$

Nevíte si rady a potřebujete inspiraci? Použijte WolframAlpha: plot $x + y = 1, x^2 + y = 0, x + y^2 = 0, x^2 + y^2 = 1$.

2. Pro uvedené funkce řešte následující úlohy:

- Určete z grafu počet kořenů rovnice $f(x) = y$ v závislosti na hodnotě proměnné y .
- Vypočtěte kořeny rovnice $f(x) = y$ s neznámou x a parametrem y .

NÁVOD: nevíte-li si rady, dosazujte za y konkrétní hodnoty a rovnicí s obecným y pak řešte obdobně.

(a) $f : x \mapsto x^2 - 7x + 2$

(b) $f : x \mapsto \frac{2x+1}{3-x}$

3. Řekněte (napište) co je *obor hodnot funkce* a na základě výsledků úlohy 2 určete obor hodnot příslušných funkcí.
4. Řekněte (napište) co je *prostá funkce* a na základě výsledků úlohy 2 rozhodněte, zda jsou příslušné funkce prosté.
- 5a Vypočtěte kořeny rovnice $f(x) = y$ s neznámou x a parametrem y a na základě spočítaných kořenů určete obor hodnot této funkce a rozhodněte, zda je prostá.

$$f : x \mapsto \frac{x^2 - x + 2}{x + 1}$$

POZNÁMKA: pokud si nevíte s úlohou rady, použijte návod z úlohy 2.

5b

$$f : x \mapsto \frac{2x + 1}{x^2 + 2x + 3}$$

5c

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 4}$$

5d

$$f : x \mapsto \frac{2x - 1}{x^2 - 1}$$

6a – 6d V úlohách 5a – 5d vypočtete kořeny jmenovatele a úvahou určete, jakých hodnot nabývá výraz v pravém a levém okolí těchto kořenů.

7a – 7d Určete, jakých hodnot přibližně nabývají výrazy v úlohách 5a– 5d pro x velké kladné a velké záporné.

8a – 8d Použijte výsledky úloh 5a – 5d, 6a – 6d, 7a – 7d k načrtnutí grafů příslušných funkcí.

DOPORUČENÍ: Svůj výsledek zkontrolujte pomocí softwaru na kreslení grafů.

9a Určete definiční obory funkcí f , g a načrtněte jejich grafy.

$$f(x) = \frac{x^4 - 4}{x^2 - 2} \quad g(x) = x^2 + 2$$

9b

$$f(x) = \frac{x^4 - 4}{x^2 + 2} \quad g(x) = x^2 - 2$$

9c

$$f(x) = \sqrt{x^2} \quad g(x) = (\sqrt{x})^2$$

9d

$$f(x) = 4 \log x^3 \quad g(x) = 3 \log x^4$$

10a Určete definiční obor funkce f a načrtněte její graf.

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x + 2}{x - 2}$$

10b

$$f(x) = \frac{1 - x}{2 - 3x + x^2}$$

10c

$$f(x) = \frac{x + 2}{3 - \sqrt{5 - 2x}}$$

NÁVOD PRO ÚLOHY 10a – 10c: Pro nakreslení grafu se hodí výraz upravit a pokrátit.

11a Vypočtěte limity funkce f pro x blízké hodnotám 1, 2, -2 (mohou být oboustranné i jednostranné).

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x + 4}{x^2 + x - 2}$$

11b Pro x blízké hodnotám 1, -1, 0.

$$f(x) = \frac{\sqrt{3x^2 + 1} - 2x}{x^2 - 1}$$

12. Znázorněte graficky výsledky z příkladů 11a, 11b.

13. Načrtněte graf funkce sgn a určete její limity pro x blížící se nule zprava a zleva

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

14. Kontrolní otázky k přednášce:

- (a) Funkční hodnota je dána jako podíl mnohočlenů $f(x) = P(x)/Q(x)$ a je dáno reálné číslo x_0 . Jak spočítáte limitu funkce f pro x jdoucí k x_0 ?
- (b) Jak spočítáte limitu v případě, že funkce obsahuje odmocninu?
- (c) Jak vypadá graf funkce v okolí bodu x_0 , pokud má v tomto bodě konečnou limitu?
- (d) Jak v případě nekonečné limity?