# Úlohy na aproximaci Taylorovým polynomem

1. Odhadněte hodnotu $\sqrt[3]{8.12}$ s použitím Taylorova polynomu nultého a prvního stupně a ke každému odhadu spočítejte, jakého řádu je chyba.

2. Odhadněte hodnotu $f(0.9)$ pomocí Taylorových polynomů nultého a prvního stupně v bodě $a = 1$ a určete řád chyby.

$$f(x) = \sqrt{2 - \sqrt{x}}$$

3. Ukažte, že pro chybu

$$R_1(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$$

platí

$$R_1'(x) = f'(x) - f'(a), \quad R_1''(x) = f''(x)$$

a odtud plyne

$$R_1(a) = R_1'(a) = 0$$

Ukažte, že pro pomocnou funkci

$$F(t) = R_1(t) - \frac{(t-a)^2}{(x-a)^2} R_1(x)$$

platí

$$F(a) = 0, \quad F(x) = 0, \quad F'(a) = 0$$

Dále ukažte, že odtud použitím Rolleovy věty dostaneme existenci $c_1$ mezi $a$, $x$ splňujícího $F'(c_1) = 0$ a $c_2$ mezi $a$ a $c_1$ splňujícího $F''(c_2) = 0$. Dvojím zderivováním $F$ dostaneme

$$F''(t) = f''(t) - \frac{2}{(x-a)^2} R_1(x)$$

a z $F''(c_2) = 0$ odvodíme Lagrangeův tvar zbytku

$$R_1(x) = \frac{f''(c_2)}{2}(x-a)^2$$