Požadavky ke zkoušce z AN1

22. prosince 2022

- **Funkce – základní pojmy.** Vzor, obraz, definiční obor, obor hodnot. Prostá funkce a souvislost s rovnicí $f(x) = y$ s parametrem y a s existencí inverzní funkce. Zúžení a rozšíření funkce, vysvětlení na příkladech. Definice funkce monotonní (rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající) na množině (zpravidla na intervalu).

- **Čísla.** Racionální a reálná čísla. Důkaz iracionality odmocniny ze dvou. Reálná čísla jako struktura se dvěma operacemi (scítání, násobení) a relací uspořádání (porovnání – větší, menší) a jejich vlastnosti (1) až (13) z [JV]. Odčítání je sčítání s opačným prvkem, dělení je násobení inverzním prvkem.

- **Spojitost funkce.** Definice spojitosti funkce v bodě, vysvětlení definice na grafu funkce. Spojitost funkce na otevřeném intervalu. Jednostranná spojitost funkce v bodě a definice spojitosti na uzavřeném intervalu. Věty o spojitosti a aritmetických operacích – z jejich důkazu: použití trojúhelníkové nerovnosti a ukázání, že pro „malá“ $|f(x)-f(a)|$, $|g(x) - g(a)|$ jsou „malá“ i $|f(x) + g(x) - (f(a) + g(a))|$, $|f(x)g(x) - f(a)g(a)|$.

- **Vlastnosti spojitých funkcí.** Weierstrassova věta o extrémech spojité funkce na uzavřeném intervalu. Příklad funkce, která nenabývá extrémů na uzavřeném intervalu (Weierstrassova věta říká, že tato funkce nemůže být spojitá). Příklad spojité funkce, která nenabývá extrémů na intervalu (Weierstrassova věta říká, že tento interval nemůže být uzavřený). Věta o kořeni spojité funkce. Použití věty o kořeni spojité funkce na řešení nerovnic.

- **Limita funkce.** Definice limity (vlastní ve vlastním bodě). Věta o limitách a aritmetických operacích. Věta o limitě spojité funkce i s důkazem (stačí napsat obě definice a vysvětlit, čím se liší). Definice nevlastní limity a limit v nevlastním bodě. Operace s nekonečny ([JV], definice 2.3.4 na str. 64). Věta o limitách a aritmetických operacích.

- **Derivace funkce.** Definice derivace, souvislost s přírůstky funkce a proměnné, znázornění na grafu. Odvození vzorců pro derivace mocninných funkcí, konstantní funkci. Pravidlo pro derivaci inverzní funkce (převrácená hodnota derivace původní funkce), odvození vzorce pro derivaci odmocnin. Pravidlo pro derivaci součtu, součinu, podílu a jejich odvození.

- **Derivace funkce a spojitost funkce.** Věta o spojitosti funkce v bodě, ve kterém má konečnou derivaci i s důkazem.
- **Derivace funkce a extrémy.** Definice lokálních extrémů. Ukázání, že ani jedna z implikací o nulové derivaci a lokálním extrému obecně neplatí (například na funkcích $|x|$, x^3). Geometrický význam nulové derivace (tečna je rovnoběžná s osou x). Lemma o lokálním extrému a nulové derivaci i s důkazem.
- **Věty o střední hodnotě.** Rolleova a Lagrangeova věta o střední hodnotě i s důkazy.
- **Derivace funkce a monotonie.** Věty o derivaci a monotonii funkcí.
- **Aproximace funkcí.** Taylorův polynom prvního a druhého stupně, zbytek Taylorova polynomu, Lagrangeův tvar zbytku Taylorova polynomu. Použití Taylorova polynomu k odhadu funkční hodnoty.
- **Polynomy, racionální funkce.** Polynomy: limity v nekonečnech, počet reálných kořenů. Racionální funkce: co jsou parciální zlomky, věta o rozkladu racionální funkce na součet polynomu a parciálních zlomků, metoda výpočtu koeficientů, zdůvodnění této metody.
- **Ekvivalentní úpravy nerovnice.** Vysvětlení, co to znamená, že je úprava nerovnice ekvivalentní a za jakých podmínek je umocnění nerovnice ekvivalentní úpravou.
- **Posloupnosti.** Konvergentní a Cauchyovská posloupnost. Věta o konvergentní a Cauchyovské posloupnosti. Na množině racionálních čísel tato věta neplatí: příklad Cauchyovské posloupnosti racionálních čísel, která nemá limitu na množině racionálních čísel (její limita je iracionální číslo). Věta o limitě monotonní omezené posloupnosti i s důkazem pro případ rostoucí posloupnosti.

  Metoda tečen na řešení rovnice, odvození vzorce pro další člen posloupnosti, demonstrace metody na příkladě.