Limity funkce

Rozšířená reálná osa:
$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$
Body $+\infty$, $-\infty$ rozšířené reálné osy nazýváme *nevlastními body*. Body $x \in \mathbb{R}$ nazýváme *vlastními body* rozšířené reálné osy.

Okolí bodu:
pro $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ je *okolím bodu* x interval $U(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$
pro $x = +\infty$, $a \in \mathbb{R}$ je *okolím bodu* $+\infty$ interval $U(+\infty) = (a, +\infty)$
pro $x = -\infty$, $b \in \mathbb{R}$ je *okolím bodu* $-\infty$ interval $U(-\infty) = (-\infty, b)$
Budeme-li chtít vyznačit, které okolí máme na mysli, tak místo $U(x)$ napíšeme $U_\varepsilon(x)$, případně $U_a(+\infty)$, $U_b(-\infty)$.

Úkol:
Zakreslete okolí na reálné ose a uvědomte si, že pro malé hodnoty ε jsou čísla ležící v okolí bodu x „blízká“ bodu x. Podobně pro velká a v případě bodu $+\infty$ a velká záporná b v případě bodu $-\infty$.

Definice limity pomocí okolí:
Řekneme, že *funkce* f *má v bodě* $x_0 \in \mathbb{R}^*$ *limitu rovnu* $L \in \mathbb{R}^*$, pokud ke každému okolí $U(L)$ existuje okolí $U(x_0)$ takové, že pro každé $x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$ platí $f(x) \in U(L)$.
Značíme: $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, nebo $f(x) \to L$ pro $x \to x_0$.

Pro konečná x_0, L lze definici přepsat pomocí ε, δ

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})(f(x) \in U_\varepsilon(L))$$

případně pomocí intervalů

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\})(f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon))$$

Podobně pro $x_0 = +\infty$, $L \in \mathbb{R}$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists a \in \mathbb{R})(\forall x > a)(f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon))$$

Úkol:
Zakreslete okolí $x_0 = +\infty$ na osu x a okolí $U_\varepsilon(L)$ na osu y a vyznačte, v kterých částech roviny může a v kterých nemůže být graf funkce f.

Další úkoly:
Napište definici pro další kombinace x_0, L, jejich okolí vyznačte na osách a v rovině vyznačte tu část, ve které graf funkce f nemůže ležet.

Jednostranné limity:

Pravé okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ je interval $(x_0, x_0 + \delta)$.
Levé okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ je interval $(x_0 - \delta, x_0)$.
Pomocí pravého/levého okolí napíšeme limitu pro x jdoucí k x_0 zprava/zleva a značíme $x \to x_0^+$ (pro limitu zprava), $x \to x_0^-$ (pro limitu zleva). Například

Úkoly:

Vyznačte pravé a levé okolí bodu x_0 na číselné ose.

Napište definici limity pro x jdoucí k x_0 zleva pro případ limity $L \in \mathbb{R}$. Okolí x_0, L vyznačte na osách a v rovině vyznačte tu část, ve které graf funkce f nemůže ležet.

Napište definici jednostranné limity pro další případy a též vyznačte v rovině okolí i místo, kde neleží graf funkce.

Výpočet limity pomocí jednostranných limit: Někdy je jednodušší spočítat jednostranné limity. Pokud vyjdou stejně (jako v případě $1/x^2$ v bodě nula – limita je z obou stran rovna plus nekonečnu), rovnají se limitě (oboustranné). Pokud vyjdou různě (jako v případě $1/x$ v nule – limita zprava je rovna plus nekonečnu, zleva minus nekonečnu), pak limita (oboustranná) neexistuje.