Lemma o spojitosti identity a konstantní funkce

Nechť $x_0, a \in \mathbb{R}$,

$K_a(x) = a$ je konstantní funkce

$id(x) = x$ je identita

Pak jsou K_a, id spojité v bodě x_0.

Důkaz:

1) konstantní funkce

pro $\varepsilon > 0$ je $a \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$,

proto je pro $x \in \mathbb{R}$: $K_a(x) \in U_\varepsilon(K_a(x_0))$

v definici spojitosti lze tedy volit k $\varepsilon > 0$ libovolné $\delta > 0$

2) identita

ukážeme, že k $\varepsilon > 0$ lze zvolit $\delta = \varepsilon$:

vzhledem k $id(x) = x$

$id(x_0) = x_0$

jsou výroky:

$x \in U_\delta(x_0)$ $\quad$ $id(x) \in U_\varepsilon(id(x_0))$

totožné

Věta o spojitosti a aritmetice

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$

f, g jsou funkce spojité v bodě x_0

Pak jsou v bodě x_0 spojité funkce

$$f+g : x \mapsto f(x) + g(x)$$
$$f-g : x \mapsto f(x) - g(x)$$
$$f \cdot g : x \mapsto f(x) \cdot g(x)$$

V případě $g(x_0) \neq 0$ je v bodě x_0 spojitá funkce

$$f/g : x \mapsto f(x)/g(x)$$

Důkaz zatím dělat nebudeme, později vyložíme hlavní myšlenku.

Použití věty o spojitosti a aritmetice:

Víme, že K_{a_1}, id jsou spojité v bodě x_0.

Odtud plyne spojitost funkce

$$K_{a_1} \cdot id : x \mapsto a_1 \cdot x$$

a odtud spojitost funkce

$$K_{a_1} \cdot id + K_{a_0} : x \mapsto a_1 x + a_0$$

Závěr:

Všechny lineární funkce jsou spojité ve všech bodech $x_0 \in \mathbb{R}$.

Víme-li, že jsou spojité lineární funkce, umíme dokázat spojitost kvadratických funkcí:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 =$$

$$= \underline{a_0} \underline{+} \underline{x(a_1 + a_2 x)}$$

Vyjádřili jsme kvadratickou funkci jako součet konstantní funkce se součinem identity a lineární funkce

Podobně dokážeme spojitost kubické funkce:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 =$$

$$= \underline{a_0} \underline{+} \underline{x(a_1 + a_2 x + a_3 x^2)}$$

Víme, že identita a kvadratická funkce jsou obě spojité, tedy i jejich součin je spojitá funkce. A součet s konstantní funkcí je také spojitý.

Závěr:

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$,

$P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

je polynom (mnohočlen) n-tého stupně

Pak je P funkce spojitá v bodě x_0.

Důkaz: (matematickou indukcí)

Provedli jsme důkaz pro $n=1$.

Analogicky, jako jsme dokazovali spojitost kvadratické a kubické funkce provedeme <u>indukční krok</u> – – za předpokladu spojitosti všech polynomů stupně $n-1$ dokážeme spojitost všech polynomů stupně n:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n =$$

$$= a_0 + x \underbrace{\left(a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1}\right)}_{\text{polynom stupně } n-1}$$

$\square$