

Okruhy k ústní zkoušce z AN1

21. prosince 2023

Při přípravě začněte **modře vysázenými** částmi. Jejich neznalost bude znamenat automatický neúspěch u ústní zkoušky. Černě vysázené části prosím úplně neignorujte. Sice vás za jejich neznalost u zkoušky z an1 nevyhodím, ale mnohé z nich budu zkoušet v dalších semestrech z an2 a an3.

Funkce: co je funkce, co má společného a čím se liší od zobrazení, co je vzor a co je obraz; co je graf funkce, slovy i matematickým jazykem, jak lze použít graf funkce k řešení nerovnic; co je obor hodnot, slovy i matematickým jazykem; co je prostá funkce, slovy i matematickým jazykem; co je obraz intervalu, slovy i matematickým jazykem.

Důkazy v matematice: přímý důkaz, nepřímý důkaz, důkaz sporem, důkaz matematickou indukcí; ke každému typu důkazu si připravte příklad důkazu.

Přírůstek funkce: co je přírůstek proměnné, přírůstek funkční hodnoty, odvození pro druhou a třetí mocninu poččetně i geometricky (obsah čtverce, objem krychle).

Derivace: derivace v bodě: definice pomocí přírůstků, derivace jako okamžitá rychlost a derivace jako směrnice tečny ke grafu funkce; derivace funkce jako zobrazení, které funkci f přiřadí funkci f' .

Kalkulus derivací: derivace součtu, násobku, součinu, podílu i s odvozením; derivace složené funkce; derivace inverzní funkce; použití na odvození vzorců pro derivaci mocnin a odmocnin;

Spojitosť funkce: definice spojitosti v bodě a na intervalu, věta o aritmetice a spojitosti, základní myšlenky důkazu; věta o spojitosti složené funkce, důkaz nakreslením grafů a okolí; důkaz spojitosti konstantní funkce a identické funkce ($f(x) = x$); důsledek: spojitost polynomů, spojitost racionální funkce i s důkazem.

Limity funkcí: okolí vlastních a nevlastních bodů, definice limity, vysvětlení na příkladech funkcí x , $1/x$; operace s nekonečny, věta o aritmetice limit.

Derivace a monotonie funkce: definice monotónní funkce, vztah monotonie funkce f a znaménka $(f(x) - f(a))/(x - a)$, vztah derivace a monotonie;

Derivace a lokální extrém: stacionární bod funkce, geometrický význam nulové derivace (poloha tečny), definice lokálního extrému, věta o lokálním extrému a derivaci, i s hlavní myšlenkou důkazu, příklad funkce s lokálním extrémem a bez nulové derivace ($|x|$) a funkce bez lokálního extrému a s nulovou derivací (x^3).

Odvození zákona lomu z Fermatova principu s použitím derivace i s použitím přírůstku funkce.

Věty o střední hodnotě: Rolleova a Lagrangeova věta i s důkazy.

Taylorův polynom: definice Taylorova polynomu funkce f stupně n v bodě a , Taylorův polynom prvního stupně a rovnice tečny ke grafu funkce. Taylorův polynom druhého stupně, vzájemná poloha grafů Taylorových polynomů prvního a druhého stupně. Definice zbytku Taylorova polynomu, Lagrangeův tvar zbytku Taylorova polynomu;

Reálná a racionální čísla: maximální a minimální prvek množiny, supremum a infimum množiny, vztahy těchto pojmů; existence suprema neprázdné omezené množiny reálných čísel; souvislost s limitami: věta o existenci jednostranné limity monotonní funkce i s hlavní myšlenkou důkazu;

Vlastnosti spojitých funkcí na uzavřeném intervalu: Věta o kořeni spojitě funkce, hlavní myšlenky důkazu. Vlastnost nabývání mezihodnot i s důkazem. Weierstrassova věta o nabývání extrémů. Věta o obrazu uzavřeného intervalu ve spojitě funkci i s důkazem. Stejněměrná spojitost funkce na množině, definice, věta o stejnoměrné spojitosti spojitě funkce na uzavřeném intervalu; příklad funkce spojitě na otevřeném intervalu, která na tomto intervalu není stejnoměrně spojitá.

Elementární funkce: definice mocniny s přirozeným exponentem, vlastnosti mocnin i s důkazy ($x^{n+m} = \dots$; v závislosti na x : $x^n <$ či > 1 , $x^n <$ či $> x^{n+1}$). Mocninné funkce a jejich grafy. Polynomy, věta o počtu kořenů polynomu i s důkazem. Racionální funkce, ryze lomená funkce, rozklad racionální funkce na součet polynomu a lineární kombinace parciálních zlomků; definice odmocnin, vlastnosti odmocnin (definiční obor, obor hodnot, monotonie, spojitost) i s důkazy.

Posloupnosti reálných čísel: limity posloupností, konvergentní posloupnosti, Cauchyovské posloupnosti, věta o konvergentní a Cauchyovské posloupnosti, důkaz jedné z implikací; věta o existenci limity monotonní posloupnosti i s hlavní myšlenkou důkazu; trojúhelníková nerovnost ($|x + y| \leq |x| + |y|$) a její důkaz.

Vlastnosti funkcí a řešení nerovnic: důsledek věty o kořeni spojitě funkce a jeho použití na řešení nerovnic; monotonie druhé mocniny a její použití na řešení nerovnice s odmocninou.