

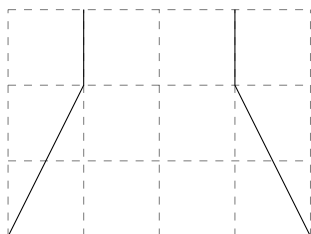
Úlohy k přípravě na zkoušku z AN1

14. prosince 2023

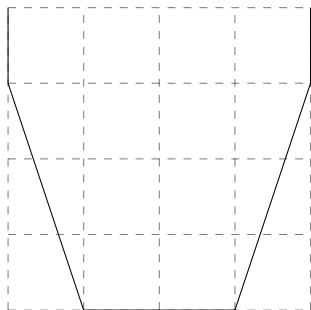
Definitivní verze

1a Na obrázku je znázorněn průřez rotačně symetrickou nádobou v jednotkové mřížce.

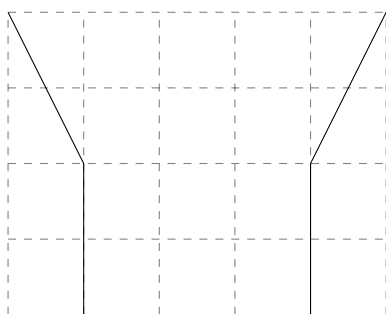
- (a) Definujte funkce S , V , které charakterizují, jakým způsobem plocha hladiny a objem pod hladinou závisejí na výšce hladiny h .
- (b) Načrtněte graf funkce S .
- (c) Výpočtete derivaci V' . Jak tuto derivaci použijete k ověření správnosti výpočtu?



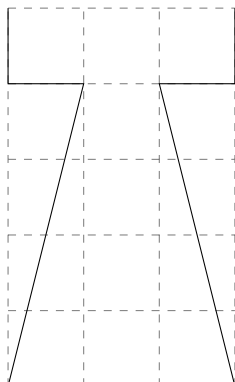
1b



1c



1d



2a Napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě a . Tečnu zakreslete do soustavy souřadné.

$$f(x) = (x^2 - 3x)\sqrt{5 - x^2} \quad a = 2$$

2b

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 5}} \quad a = 3$$

3a Odvoďte z definice vzorec pro derivaci funkce

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

3b

$$f(x) = \sqrt{x^3}$$

3c

$$f(x) = x^5$$

3d

$$f(x) = \frac{1}{x^3}$$

4a Určete definiční obor a obor hodnot funkce f

$$f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 5x + 8}$$

4a* Vyřešte úlohu bez použití derivace.

4b

$$f(x) = \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}$$

4b** Vyřešte úlohu bez použití derivace.

4c

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 16x^2$$

4c* Určete, pro která $y \in \mathbb{R}$ má rovnice $y = f(x)$ s neznámou x právě tři řešení.

5a Vypočtěte limity funkce f v bodech $2, -1, +\infty$.

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}(3 - \sqrt{x^2 + 5})}{x^2 + 2x - 8}$$

5b

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{\sqrt{2x^2 + 1}(3 - \sqrt{x^2 + 5})}$$

6a Určete definiční obor funkce f . Dále určete, zda má funkce v některých bodech odstranitelnou nespojitost.

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{\sqrt{2x^2 + 1}(3 - \sqrt{x^2 + 5})}$$

6b

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}(3 - \sqrt{x^2 + 5})}{x^2 + 2x - 8}$$

7a Řešte nerovnici s použitím důsledku věty o kořeni spojitě funkce.

$$\sqrt{2x^2 - 7} \geq x - 1$$

7b

$$\sqrt{7 - 3x^2} \geq x + 1$$

7c

$$\sqrt{33 - 2x^2} \leq x + 3$$

8. Nerovnice v předchozí úloze řešte s použitím monotonie kvadratické funkce.

9a Napište Taylorův polynom prvního a druhého stupně funkce f v bodě a . Načrtněte graf Taylorova polynomu prvního stupně a určete, na které jeho straně leží graf polynomu druhého stupně.

$$f(x) = (2x^2 + 1)\sqrt{2 + x}, \quad a = -1$$

9b

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x + 5}}{(x + 1)^2}, \quad a = -2$$

9c

$$f(x) = \frac{4x}{(x^2 + x + 1)^2}, \quad a = -1$$

9d

$$f(x) = x\sqrt{5 - x^2}, \quad a = 2$$

10a Určete definiční obor funkce f . Dále určete, zda má funkce v některých bodech odstranitelnou nespojitost.

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{\sqrt{2x^2 - x - 1}}$$

10b

$$f(x) = \frac{\sqrt{5x - x^2} - 2}{x^2 - 3x + 2}$$

10c

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{x - 2 - \sqrt{x + 4}}$$

11a Z obdélníkového plechu o velikosti $80\text{cm} \times 50\text{cm}$ se má po odstrižení stejně velkých čtverců v rozích plechu vyrobit krabice bez víka. Jak velké čtverce je třeba odstříhnout, aby vzniklá krabice měla maximální objem a jak velký bude tento objem?

11b Hodláme koupit obdélníkovou parcelu o rozloze 200m^2 , jejíž jedna strana bude ohraničena již hotovou zdí, zatímco ze zbývajících tří stran bude nutné parcelu oplotit. Zvolte obdélník tak, aby měl plot minimální délku a najděte délky příslušných stran.

11c Chceme vyrobit otevřenou nádrž válcového tvaru o objemu $V = 1000\text{l}$. Určete rozměry nádrže, aby byla spotřeba plechu na výrobu nádrže co nejmenší.

11d Do kužele o výšce $h = 10\text{cm}$ a podstavě o průměru $d = 8\text{cm}$ vepište váleček se stejnou osou rotace jako je kužel a s co největším objemem. Určete objem válce.

12a Rozložte zlomek na součet polynomu a parciálních zlomků a udělejte zkoušku

$$\frac{x^3 + x^2 - 10x + 6}{x^3 - 3x^2 + 2x}$$

12b

$$\frac{-x^4 + 6x^2 - 10x + 4}{x^4 - 2x^3 + 2x^2}$$

13a Určete definiční obor funkce f , nalezněte její stacionální body a její lokální extrém.

$$f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 5x + 8}$$

13b

$$f(x) = \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}$$

13c

$$f(x) = (x^2 - 4)^3(x + 2)^5$$

14. Načrtněte graf funkce f . Dále napište definici spojitosti f v bodě $x = 2$, znegujte ji a ukažte, že f této negaci vyhovuje.

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & x \in [0, 2] \\ 5 - x^2 & x \in (2, 3] \end{cases}$$