

Úlohy na cvičení 13. prosince 2023 z AN1

1. A-F:

Dokažte

$$(\forall n \in \mathbb{R})(\forall x \in (1, +\infty))(x^{n+1} > x^n)$$

$$(\forall n \in \mathbb{R})(\forall x \in (1, +\infty))(x^n > 1)$$

2. Pro funkci f určete obraz množiny M .

A-F: $f(x) = 3x - x^3$, $M = (0, 2)$

AB: $f(x) = (x - 2)^2$, $M = (0, 3)$

CD: $f(x) = x^2 - 4x$, $M = (0, 5)$

EF: $f(x) = 3x - x^2$, $M = (-1, 2)$

3. AB: Z obdélníkového papíru o velikosti $8\text{cm} \times 5\text{cm}$ se má po odstrižení stejně velkých čtverců v rozích vyrobit krabička bez víka. Jak velké čtverce je třeba odstrihnout, aby vzniklá krabice měla maximální objem a jak velký bude tento objem?

CD: Rozsáhlý les je z jihu ohraničen přímou cestou vedoucí od západu na východ. Z východního místa na této cestě se máme dostat na místo, které je od nás vzdáleno 8km západně a 3km severně. Jistou dobu půjdeme po cestě rychlostí 6km za hodinu, pak šikmo lesem rychlostí 4km za hodinu. Jak dlouho máme jít po cestě, abychom se do cíle dostali co nejdříve? Kolik při tom ujdeme kilometrů a jak dlouho nám bude cesta trvat?

EF: Hodláme koupit obdélníkovou parcelu o rozloze 400m^2 , jejíž jedna strana bude ohraničena již hotovou zdí, zatímco ze zbývajících tří stran bude nutné parcelu oplotit. Zvolte obdélník tak, aby měl plot minimální délku a najděte délky příslušných stran.

A-F: Chceme vyrobit uzavřenou nádrž válcového tvaru o objemu $V = 100\text{l}$. Určete rozměry nádrže, aby byla spotřeba plechu na výrobu nádrže co nejmenší.