Derivace funkce – výlet za Newtonem do 17. století

16. října 2023

Definice: *Derivací funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ podle Newtona* nazveme číslo, které dostaneme z výrazu $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ po pokrácení h a dosazením $h = 0$.[1] Tuto derivaci značíme $f'(a)$.

Označíme-li $x = a + h$, dostaneme odtud $h = x - a$ a

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Na grafu funkce f je čitatel $f(a+h)-f(a) = f(x)-f(a)$ roven přírůstku funkce a jmenovatel $h = x - a$ přírůstku proměnné x.

Od počátku 19. století se derivace definuje $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ nebo $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Definice: Přímku o rovnici $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ nazýváme *tečnou ke grafu funkce f v bodě a.*

Úlohy:

1. Spočítejte následující derivace přímo z definice, napište rovnici příslušné tečny, nakreslete graf funkce i s tečnou.
   (a) $f(x) = x^2$, $f'(3) =?$
   (b) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$, $f'(2) =?$
   (c) $f(x) = 4x^2 + 6$, $f'(-2) =?$
   (d) $f(x) = x^3$, $f'(1) =?$
   (e) $f(x) = 2x - 5$, $f'(4) =?$
2. Odvoďte vzorce
   (a) Pro $f(x) = x$ je $f'(a) = 1$
   (b) Pro $f(x) = x^2$ je $f'(a) = 2a$
   (c) Pro $f(x) = x^3$ je $f'(a) = 3a^2$
   (d) Pro $f(x) = k$ (f je konstantní funkce) je $f'(a) = 0$
   (e) Pro $f(x) = ax + b$ je $f'(x) = a$
   (f) Pro funkce g, h a funkci $f(x) = g(x)+h(x)$ je $f'(a) = g'(a)+h'(a)$
   (g) Pro funkci f, konstantu c a funkci $g(x) = cf(x)$ je $g'(a) = cf'(a)$
3. Použijte vzorce z úlohy 2 k řešení úlohy 1.

---

[1] V závěru dosazujeme $h = 0$, což je v rozporu s tím, že na začátku dělíme h. Za Newtonových dob bylo takové h považované za nekonečně malé, ale nenulové číslo.

4. Spočítejte následující derivace přímo z definice, napište rovnici příslušné tečny, nakreslete graf funkce i s tečnou.
   (a) $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(1) =?$
   (b) $f(x) = \sqrt{2x+5}$, $f'(2) =?$
   (c) $f(x) = \sqrt{5-x}$, $f'(1) =?$
5. Odvoďte vzorec pro derivaci součinu $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$. Vzorec ilustrujte na obdélníku o stranách f, g a dalším obdélníku o stranách $f + \Delta f$, $g + \Delta g$. Vypočtěte rozdíl obsahů těchto dvou obdélníků.

Definice: *Derivací funkce* f nazýváme funkci f', která číslu a přiřadí hodnotu $f'(a)$ (tedy derivaci f v bodě a).

Úlohy:

6a V kapitole 2.2 učebního textu jsme odvodili funkci popisující závislost objemu tekutiny na výšce hladiny

$$V(h) = \begin{cases} \pi(225h + \frac{15}{2}h^2 + \frac{1}{12}h^3) & h \in [0, 10] \\ \pi(900h - 5916.\overline{3}) & h \in (10, 35] \end{cases}$$

Vypočtěte derivaci $V'(h)$, ukažte, že se rovná obsahu hladiny $S(h)$ ve výšce h a vysvětlete, že to není náhoda. Derivaci V' počítejte s použitím vzorců.

6b–d Totéž pro další tři nádoby z kapitoly 2.2.

7. Vzorec pro derivaci součinu použijte k odvození vzorce $(x^n)' = nx^{n-1}$. K důkazu použijte matematickou indukci.
8. Odvoďte vzorec[2] $(\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x})$
   (a) Použijte definici derivace.
   (b) Načrtněte čtverec, jeho stranu označte $y = \sqrt{x}$, obsah je x. Větší čtverec má stranu $y + \Delta y$ a obsah $x + \Delta x$. Odvoďte odtud $\Delta x = 2y\Delta y + (\Delta y)^2$. Zanedbáním členu druhého řádu $(\Delta y)^2$ dostaneme $\Delta x = 2y\Delta y$, odkud pak $\Delta y/\Delta x = 1/(2y)$.
9. Použijte vzorec z úlohy 8 k řešení úlohy 4a.
10. Odvoďte vzorec pro derivaci složené funkce $\left(f(g(x))\right)'(a) = f'(g(a))g'(a)$. K ilustraci odvození použijeme úlohu (kapitola 1.2 učebního textu) o tlaku závaží působícího silou na desku čtvercového tvaru o straně a a změně tlaku při změně strany čtverce (změní se na $a + \Delta a$).
11. Použijte vzorce z úloh 8, 10 k řešení úloh 4.

[2]Všimněte si formální shody se vzorcem $(x^n)' = nx^{n-1}$ pro $n = 1/2$.