

Šestá série úloh ze středoškolské matematiky pro studenty FP TUL

Cíl: zopakovat aritmetickou a geometrickou posloupnost.
V závěru je několik příkladů na praktické použití geometrické posloupnosti a návod na první dvě úlohy (vysvětlujeme v něm souvislost s aritmetickým a geometrickým průměrem).

- 1a Určete všechna reálná čísla x , pro něž čísla a_1, a_2, a_3 tvoří aritmetickou posloupnost. Udělejte zkoušku tím, že členy spočítáte.

$$a_1 = x^2 - 4, \quad a_2 = x^2 + 4x + 4, \quad a_3 = 16$$

1b

$$a_1 = x^2 - 2, \quad a_2 = 2x + 1, \quad a_3 = x + 6$$

1c

$$a_1 = 6 - x, \quad a_2 = 1 - 2x, \quad a_3 = x^2 - 2$$

- 2a Určete všechna reálná čísla x , pro něž čísla a_1, a_2, a_3 tvoří geometrickou posloupnost

$$a_1 = 1, \quad a_2 = x, \quad a_3 = 4x + 12,$$

2b

$$a_1 = 1, \quad a_2 = x - 1, \quad a_3 = x + 1,$$

2c

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2x + 1, \quad a_3 = 4x + 5,$$

- 3a Rozhodněte, zda je posloupnost aritmetická či geometrická (nemusí nastat ani jeden z případů) a pokud ano, určete její diferenci či kvocient.

3b

$$a_n = \frac{n + 3}{5}$$

3c

$$a_n = 3 - 2n$$

3d

$$a_n = \frac{6}{n + 1}$$

3e

$$a_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$$

3f

$$a_n = 1 + (n - 1)(n - 2)(n - 3)$$

4. V bance máte uloženo deset tisíc korun na úrok 10% p.a. Kolik získáte na úrocích za tři roky? Neuvažujte jiné změny na účtu než úroky (například bankovní poplatky).¹
5. Při úroku 5% p.a. se váš vklad zdvojnásobí přibližně za 14 let. Jaký přibližný násobek původního vkladu budete mít za padesát let?
6. Při vývoji výpočetní techniky bylo vyzorováno, že se výkon počítačů zdvojnásobí přibližně každých 18 měsíců. Tento poznatek byl formulován jako Mooreův zákon. Použijte Mooreův zákon k odhadu změny výkonu počítačů
 - (a) za deset let
 - (b) za třicet let
7. Při rychle se šířící nákaze je každý další den o 100% více nakažených než den předchozí. O kolik procent více nakažených bude za šest dní (předpokládáme stále stejné tempo šíření nákazy).

Nápověda na úlohy jedna, dva (souvislost s průměry):

Čísla a_1, a_2, a_3 tvoří aritmetickou posloupnost, pokud je rozdíl (diference) dvou sousedních členů konstantní, tj. pokud platí

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2$$

Odtud vyjádříme $a_2 = (a_1 + a_3)/2$, tedy člen je roven aritmetickému průměru členu předchozího a následujícího.

Podobně pro geometrickou posloupnost platí

$$a_3/a_2 = a_2/a_1$$

odkud vyjádříme $a_2^2 = a_1 a_3$. Pro nezáporné a_2 dále upravíme $a_2 = \sqrt{a_1 a_3}$, tedy nezáporný člen geometrické posloupnosti je roven geometrickému průměru členu předchozího a následujícího.

¹Uvědomte si, že zůstatky v jednotlivých letech tvoří geometrickou posloupnost s kvocienem 1.1