Limita funkce

text pro studenty FP TUL

6. prosince 2024

Martina Šimůnková

Definice limity. Nechť $a, L \in \mathbb{R}$, f je funkce.

Číslo L nazveme limitou funkce f v bodě a, pokud platí (1).

Značíme
$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$
případně
$$f(x) \to L \text{ pro } x \to a$$
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in U_\delta(a) \setminus \{a\})(f(x) \in U_\varepsilon(L)) \tag{1}$$
Připomeňme: $U_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta)$, podobně $U_\varepsilon(L) = (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Poznámky.

1. Množinu
$$P_\delta(a) := U_\delta(a) \setminus \{a\} = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) \tag{2}$$
nazýváme prstencovým okolím bodu a.

2. Nutnou podmínkou existence limity funkce f v bodě a je existence $\delta > 0$ takového, že $P_\delta(a) \subseteq D(f)$. Funkce tedy musí být definovaná na prstencovém okolí bodu a, aby mohla mít v bodě a limitu.

3. (o limitě a hodnotách na prstencovém okolí)

   Hodnota limity funkce f v bodě a závisí jen na funkčních hodnotách v prstencovém okolí bodu a.

   Formálně zapsáno: pokud existuje $\delta > 0$ takové, že platí
$$(\forall x \in P_\delta(a))(f(x) = g(x)),$$
   pak má funkce f v bodě a limitu právě když má v bodě a limitu funkce g a platí
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$$

Věta o limitě a spojitosti. Funkce f je v bodě a spojitá, právě když existuje limita funkce f v bodě a a je rovna funkční hodnotě v bodě a, tj.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Důkaz je přímým důsledkem definic. V definici spojitosti si všimneme, že výrok

$$f(a) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$$

je splněn pro každé $\varepsilon > 0$, definice tedy nezmění význam při záměně $\forall x \in U_\delta(a)$ za $\forall x \in P_\delta(a)$.

Příklady.

1. Ze spojitosti polynomů a spojitosti podílu spojitých funkcí plyne

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+1}{x^2-x-1} = \frac{4+1}{4-2-1} = 5$$

2. Pro $x \in P_2(1)$[1] platí

$$\frac{x^2-1}{x-1} = x+1$$

a funkce $g(x) = x + 1$ je spojitá v bodě $a = 1$. Proto je (první rovnost plyne z poznámky 3, druhá z věty o limitě a spojitosti)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$$

Definice jednostranných limit.[2] Nechť $a, L \in \mathbb{R}$, f je funkce.

Číslo L_1 nazveme limitou funkce f v bodě a zprava, pokud platí (3).

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in (a, a+\delta))(f(x) \in U_\varepsilon(L_1)) \tag{3}$$

Značíme

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L_1$$

případně

$$f(x) \to L_1 \text{ pro } x \to a^+$$

[1] Tedy pro $x \in (1-2, 1) \cup (1, 1+2)$

[2] Červeně je zvýrazněno, kde se liší definice jednostranné limity od definice limity.

Číslo L_2 nazveme limitou funkce f v bodě a zleva, pokud platí (4).

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (a-\delta, a))(f(x) \in U_\varepsilon(L_2)) \tag{4}$$

Značíme

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_2$$

případně

$$f(x) \to L_2 \text{ pro } x \to a^-$$

Poznámky.

1. Definice jednostranných limit se od definice limity liší jen v několika málo detailech. Pro rychlejší orientaci jsme tyto detaily zvýraznili červenou barvou.

2. Nutnou podmínkou existence limity funkce f v bodě a zprava je existence $\delta > 0$ takového, že $(a, a+\delta) \subseteq D(f)$. Funkce tedy musí být definovaná na pravém okolí bodu a, aby mohla mít v bodě a limitu zprava.

3. Analogicky: Nutnou podmínkou existence limity funkce f v bodě a zleva je existence $\delta > 0$ takového, že $(a-\delta, a) \subseteq D(f)$. Funkce tedy musí být definovaná na levém okolí bodu a, aby mohla mít v bodě a limitu zleva.

4. (o limitě a hodnotách na okolí)

   Hodnota jednostranné limity funkce f v bodě a závisí jen na funkčních hodnotách v příslušném okolí bodu a.

   Formálně zapsáno:

   Pokud existuje $\delta > 0$ takové, že platí

   $$(\forall x \in (a-\delta, a))(f(x) = g(x)),$$

   pak má funkce f v bodě a limitu zleva právě když má v bodě a limitu zleva funkce g a platí

   $$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^-} g(x)$$

   Pokud existuje $\delta > 0$ takové, že platí

   $$(\forall x \in (a, a+\delta))(f(x) = g(x)),$$

pak má funkce f v bodě a limitu zprava právě když má v bodě a limitu zprava funkce g a platí

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x)$$

Lemma o limitě a jednostranných limitách. Nechť $a \in \mathbb{R}$, f je funkce. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní

(i) Funkce f má v bodě a limitu a platí

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

(ii) Funkce f má v bodě a obě jednostranné limity a platí

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Důkaz. Dokážeme dvě implikace (i)⇒(ii), (ii)⇒(i).

K důkazu obou implikací si stačí uvědomit (2).

(i)⇒(ii): Pokud platí

$$(\forall x \in P_\delta(a))(f(x) \in U_\varepsilon(L))$$

pak platí i

$$(\forall x \in (a - \delta, a))(f(x) \in U_\varepsilon(L))$$

a

$$(\forall x \in (a, a + \delta))(f(x) \in U_\varepsilon(L))$$

(ii)⇒(i): Pokud platí

$$(\forall x \in (a - \delta, a))(f(x) \in U_\varepsilon(L)) \quad \wedge \quad (\forall x \in (a, a + \delta))(f(x) \in U_\varepsilon(L))$$

pak platí

$$(\forall x \in P_\delta(a))(f(x) \in U_\varepsilon(L))$$

Příklad. Funkce f je daná vztahem

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \in [0, 1] \\ x^2 + 2 & x \in (1, 2] \end{cases} \tag{5}$$

Chceme zjistit, zda má funkce f v bodě $a = 1$ limitu. Vypočteme jednostranné limity

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2 + 2 = 3$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 2x - 1 = 1$$

Protože se jednostranné limity funkce f v bodě $a = 1$ nerovnají, nemá funkce f v bodě a limitu.

Definice (typy nespojitostí). Nechť $a \in \mathbb{R}$, f je funkce. Nechť f není spojitá v bodě a.

Řekneme, že funkce f má v bodě a odstranitelnou nespojitost, pokud má f v bodě a limitu.

Řekneme, že funkce f má v bodě a nespojitost typu skoku, pokud má f v bodě a obě jednostranné limity, ale nemá v bodě a limitu.

Příklady.

1. Funkce f zadaná v (5) má v bodě $a = 1$ nespojitost typu skoku.
2. Funkce signum (též zvaná znaménková funkce) daná vztahem

   $$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

   má v bodě $a = 0$ jednostranné limity

   $$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1$$

   a má tedy v bodě $a = 1$ nespojitost typu skoku.
3. Funkce $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ má v bodě $a = 1$ limitu

   $$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} x + 1 = 2$$

   a má tedy v bodě $a = 1$ odstranitelnou nespojitost.
4. Funkce $f(x) = \operatorname{sgn}(x^2)$ má v bodě $a = 0$ jednostranné limity

   $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x^2) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$
   $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn}(x^2) = \lim_{x\to 0^-} 1 = 1$$

   Funkce f má dle lemmatu o limitě a jednostranných limitách v bodě $a = 0$ limitu rovnu $L = 1$. Protože $f(0) = 0 \neq L$, není f v bodě a spojitá a má v bodě a odstranitelnou nespojitost.

Věta o jednostranných limitách a spojitosti. Pro jednostranné limity platí věta analogická větě o limitě a spojitosti:

1. Funkce f je v bodě a spojitá zprava, právě když existuje limita funkce f v bodě a zprava a je rovna funkční hodnotě v bodě a, tj.

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

2. Funkce f je v bodě a spojitá zleva, právě když existuje limita funkce f v bodě a zleva a je rovna funkční hodnotě v bodě a, tj.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

Důkaz je přímým důsledkem definic.

Spojitost funkce f zprava v bodě a je definovaná

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (a, a+\delta))(f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon))$$

Pokud v této definici vyměníme $f(a)$ za hodnotu limity L zprava, dostaneme definici limity funkce f v bodě a zprava

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (a, a+\delta))(f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon))$$

Analogicky pro spojitost zleva a limitu zleva.