Posloupnosti reálných čísel

15. listopadu 2024

Definice: Posloupností reálných čísel nazýváme funkci, jejímž definičním oborem je množina přirozených čísel. Funkční hodnotu značíme indexem (např. a_n) a nazýváme ji n-tým členem posloupnosti. Posloupnost značíme symbolem (někteří autoři opužívají kulaté závorky $(a_n)_{n=1}^{\infty}$)

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \text{případně } \{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$$

V obecnějším případě je definičním oborem posloupnosti podmnožina celých čísel začínající indexem $n_0 \in \mathbb{Z}$.

Příklady.

1. Aritmetická posloupnost $\{2n-3\}_{n=0}^{\infty}$ má členy $-3, -1, 1, 3, 5 \ldots.$
2. Geometrická posloupnost $\{2^n\}_{n=0}^{\infty}$ má členy $1, 2, 4, 8, \ldots.$

Definice monotonní posloupnosti. Posloupnost $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ nazveme rostoucí posloupností,
pokud pro každé $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0$ platí $a_n < a_{n+1}$,
klesající posloupností,
pokud pro každé $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0$ platí $a_n > a_{n+1}$,
nerostoucí posloupností,
pokud pro každé $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0$ platí $a_n \geq a_{n+1}$,
neklesající posloupností,
pokud pro každé $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0$ platí $a_n \leq a_{n+1}$,
Posloupnost, která je buď nerostoucí nebo neklesající, nazveme monotonní posloupností.

Příklady.

1. Posloupnost $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ má členy $1, 1/2, 1/3, \ldots$, proto tipujeme, že je klesající. K důkazu je třeba ukázat[1]

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}$$

Formální důkaz

Pro $n \in \mathbb{N}$ platí $n < n+1$,
Nerovnost vydělíme kladným výrazem $n(n+1)$,
dostaneme $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$
což jsme chtěli dokázat.

[1] Jiný možný postup je upravit výraz $a_{n+1} - a_n$ do tvaru, ze kterého je vidět, zda je kladný/záporný/nekladný/nezáporný.

Zkušenější studenti mohou důkaz odbýt úvahou, že převrácené hodnoty kladných čísel jsou uspořádány opačně než jsou tato čísla. Na požádání, ale tito studenti umí svoje slova vysvětlit (jejich vysvětlení bude založené n astejných nebo podobných argumentech jako formální důkaz výše).

2. Posloupnost $\{n/(n+1)\}_{n=1}^{\infty}$ má členy $1/2, 2/3, 3/4, \ldots$, proto tipujeme, že je rostoucí. Svůj tip dokážeme

$$\begin{aligned}
&\text{Chceme ukázat, že pro } n \in \mathbb{N} \quad \text{platí } \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}, && (1)\\
&\text{nerovnost vynásobíme kladným výrazem } (n+1)(n+2), &&\\
&\text{dostaneme } n(n+2) < (n+1)^2 &&\\
&\text{po úpravě } n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1 \quad \text{což víme, že platí.} && (2)
\end{aligned}$$

Všechny použité úpravy nerovnosti (1) jsou ekvivalentní. Proto z platnosti nerovnosti (2) plyne platnost (1).

3. Posloupnost $\{\sin(n\pi/2)\}_{n=0}^{\infty}$ má členy $0, 1, 0, \ldots$. Z prvních třech členů je vidět, že posloupnost není ani rostoucí, ani klesající, ani nerostoucí. ani neklesající. Proto tato posloupnost není monotonní.

4. Posloupnost $\{n(n-1)(n-2)\}_{n=0}^{\infty}$ má členy $0, 0, 0, 6, 24, \ldots$, odkud vidíme, že nemůže být ani rostoucí, ani klesající, ani nerostoucí.

   Ukážeme, že posloupnost je od čtvrtého členu rostoucí, odkud plyne, že je neklesající.

$$\begin{aligned}
&\text{Chceme ukázat, že pro } n \in \mathbb{N}, n \geq 3 &&\\
&\text{platí } n(n-1)(n-2) < (n+1)n(n-1). && (3)\\
&\text{Začneme nerovností } n - 2 < n + 1 \quad \text{která platí pro } n \in \mathbb{N} && (4)\\
&\text{Nerovnost (4) vynásobíme kladným výrazem } n(n-1) &&\\
&\text{a dostaneme nerovnost (3).} &&
\end{aligned}$$

Poznámka. Rozmyslete si, že platí.

1. Je-li posloupnost $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ klesající, pak je i nerostoucí.
2. Je-li posloupnost $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ rostoucí, pak je i neklesající.

Definice omezené posloupnosti. Posloupnost $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ nazveme shora omezenou,

pokud $\exists H \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0$ platí $a_n \leq H$,

zdola omezenou,

pokud $\exists D \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0$ platí $a_n \geq D$,

omezenou,

pokud je shora omezená i zdola omezená.

Číslo H nazýváme

horní závorou (nebo též horní hranicí) posloupnosti $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$,

číslo D nazýváme

dolní závorou (dolní hranicí) posloupnosti $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$.

Rozmyslete si.

1. Je-li posloupnost rostoucí, pak je zdola omezená a její první člen je její dolní závorou.

2. Je-li posloupnost klesající, pak je shora omezená a její první člen je její horní závorou.

Příklady.

1. Posloupnost $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající, proto je $a_1 = 1$ její horní závora. Číslo $D = 0$ je dolní závora posloupnosti. Posloupnost je tedy omezená.

2. Posloupnost $\{n/(n+1)\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí, proto je $a_1 = 1/2$ její dolní závora. Číslo $H = 1$ je horní závora posloupnosti. Posloupnost je tedy omezená.

3. Posloupnost $\{\sin(n\pi/2)\}_{n=0}^{\infty}$ je omezená, její dolní závorou je $D = -1$, horní závorou je $H = 1$.

4. Posloupnost $\{n(n-1)(n-2)\}_{n=0}^{\infty}$ je zdola omezená, její dolní závorou je $D = 0$.

   Ukážeme, že posloupnost není shora omezená. K tomu stačí ukázat, že[2]

   $$(\forall H \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N}_0)(n(n-1)(n-2) > H) \tag{5}$$

   Upravíme n-tý člen posloupnosti a_n vytknutím n z obou závorek

   $$a_n = n(n-1)(n-2) = n^3 \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)$$

   Pro $n \geq 3$ platí

   $$n^2 > 1 \tag{6}$$
   $$1 - \frac{1}{n} > 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \tag{7}$$
   $$1 - \frac{2}{n} > 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \tag{8}$$

   Všechny výrazy v nerovnostech jsou kladné. Proto lze (viz následující cvičení) nerovnosti násobit. Vynásobením nerovností (6), (7), (8) dostaneme nerovnost

   $$n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) > \frac{3}{8} \tag{9}$$

[2] Více viz následující cvičení.

Nerovnost (9) vynásobíme n

$$n^3\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) > \frac{3n}{8} \tag{10}$$

a tedy (levá strana je rovna a_n)

$$\text{pro } n \geq 3 \quad \text{platí } a_n > \frac{3n}{8} \tag{11}$$

Zvolme nyní n vyhovující (více viz cvičení)

$$n \geq 3 \quad \wedge \quad \frac{3n}{8} > H \tag{12}$$

pak z (11), (12) plyne

$$a_n > H.$$

Dokázali jsme (5) a tedy H není horní závora posloupnosti $\{n(n-1)(n-2)\}_{n=0}^{\infty}$, a tedy posloupnost není shora omezená.

Cvičení.

1. Rozmyslete si, že (5) je formálně zapsaný výrok
   Pro každé $H \in \mathbb{R}$ platí, že H není horní závora posloupnosti $\{n(n-1)(n-2)\}_{n=0}^{\infty}$.

2. **Násobení nerovnic s kladnými členy.**

   Nechť jsou a, b, c, d kladná reálná čísla. dokažte, že pak platí

   $$\text{Pokud je } a > b \quad \text{a zároveň } c > d, \quad \text{pak platí } ac > bd.$$

   Návod: vynásobte nerovnost $a > b$ kladným číslem c a nerovnost $c > d$ kladným číslem b. Dostanete

   $$ac > bc \quad \wedge \quad cb > db$$

   odkud dostaneme

   $$ac > db.$$

3. **Násobení více nerovnic s kladnými členy.**

   Nechť jsou a, b, c, d, e, f kladná reálná čísla. Dokažte, že pak platí

   $$(a > b \quad \wedge \quad c > d \quad \wedge \quad e > f) \Rightarrow (ace > bdf).$$

   Návod: použijte předchozí cvičení.

4. Dokažte matematickou indukcí, že je možné násobit i vyšší počet nerovností s kladnými výrazy na stranách nerovnosti.

5. Ukažte, že ke každému $H \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ splňující

$$\frac{3n}{8} > H \tag{13}$$

Návod: Pro $H \leq 0$ lze zvolit $n = 1$. Pro $H > 0$ upravíme (13) na

$$n > \frac{8H}{3}, \tag{14}$$

pravou stranu (14) zaokrouhlíme na nejbližší vyšší celé číslo a přičteme jedničku.