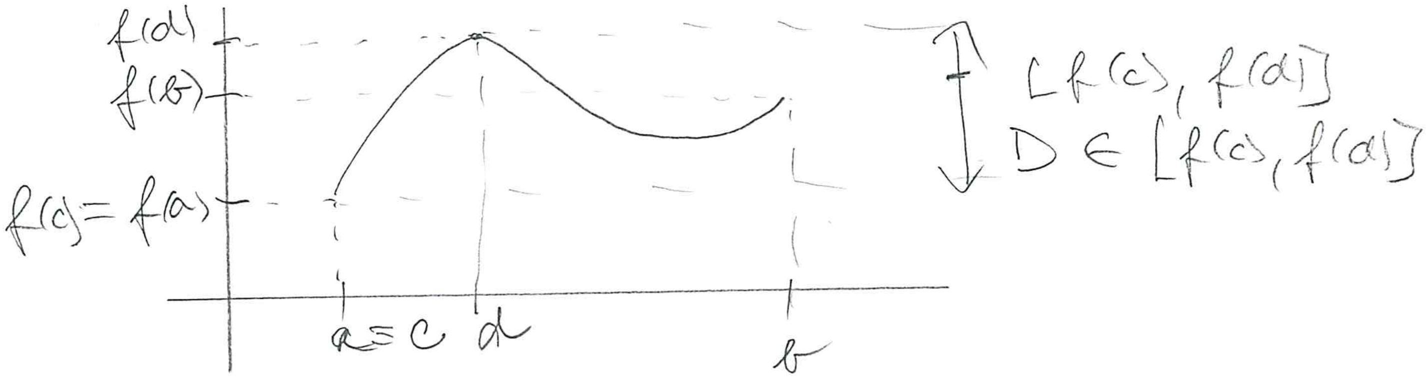
Věta o oboru hodnot spojité funkce

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$
nechť je funkce f spojitá
na $I = [a, b]$.

Pak je $f(I) := \{f(x) : x \in I\}$
uzavřený interval

Důkaz:



Podle Weierstrassovy věty o extrémech spojité funkce na uzavřeném intervalu existují $c, d \in [a, b]$, že

$$(\forall x \in I)\,(f(c) \leq f(x) \leq f(d))$$

Odtud

$$f(I) \subseteq [f(c), f(d)]$$

Chceme ukázat:

$$f(I) = [f(c), f(d)]$$

K tomu je potřeba dokázat

$$[f(c), f(d)] \subseteq f(I)$$

Funkce f je spojitá na intervalu

$$I_1 = [c, d] \cup [d, c]$$

a proto má f na I_1 vlastnost nabývání mezihodnot.

Nechť ~~$D \in I_1$, pak existuje~~

$D \in [f(c), f(d)]$, pak

existuje $x \in I_1$, že $f(x) = D$.

Odtud: $f(x) = D \in f(I)$

Proto je $[f(c), f(d)] \subseteq f(I)$

Odtud plyne: $f(I) = [f(c), f(d)]$,

tedy $f(I)$ je uzavřený interval.