Úlohy na cvičení z AN1

23. října 2024

Poznámka: úlohy 3 až 8 jsou zopakovány z minula a předminula. Přitom úlohy 4 až 8 jsou vyřešené ve videích, odkaz na videa je na webu předmětu u přednášky 3. října a na elearningu u informace o výuce 21. září pro studenty v kombinované formě.

1. Načrtněte graf funkce f a ukažte, že f není spojitá v bodě $a = 2$ (přesněji řečeno, že vyhovuje negaci definice spojitosti, tj. zvolte vhodně ε a ukažte, že pro každé δ platí ...)

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & x \in [-1, 2) \\ 6 - x^2 & x \in [2, 3] \end{cases}$$

2. Na přednášce jsme dokazovali rozborem případů trojúhelníkovou nerovnost

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})(|x + y| \leq |x| + |y|)$$

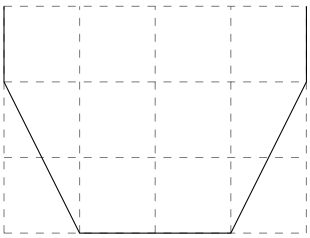
Dokončete důkaz.

3b Na obrázku je znázorněn průřez rotačně symetrickou nádobou v jednotkové mřížce.

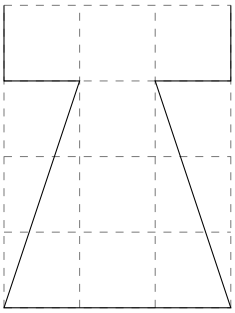
(a) Definujte funkce S, V, které charakterizují, jakým způsobem plocha hladiny a objem pod hladinou závisejí na výšce hladiny h.

(b) Načrtněte graf funkce S.

(c) Výpočtěte derivaci V'. Jak tuto derivaci použijete k ověření správnosti výpočtu?



3c



4a Vypočtěte derivaci funkce f. K výpočtu použijte definici derivace. Výsledek pak zkontrolujte derivací podle vzorců.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

5a Použijte pravidlo pro derivaci složené funkce k výpočtu derivace funkce f.

Návod: převrácenou hodnotu napište jako mocninu s exponentem -1.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 5}$$

5b

$$f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

5c

$$f(x) = \frac{1}{g(x)}$$

6. Odvoďte vzorec pro derivaci podílu úpravou podílu na součin. Použijte pravidlo pro derivaci součinu a výsledek předchozí úlohy

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\,(g(x))^{-1}$$

7. Odvoďte vzorec pro derivaci mocniny se záporným celým exponentem $(x^{-n})'$.

8. Odvoďte vzorec pro derivaci mocniny s racionálním exponentem $(\sqrt[m]{x^n})'$.