Úlohy na cvičení z AN1

30. října 2024

Poznámka: úlohy 4 až 9 jsou zopakovány ze starších cvičení. Přitom úlohy 5 až 9 jsou vyřešené ve videích, odkaz na videa je na webu předmětu u přednášky 3. října a na elearningu u informace o výuce 21. září pro studenty v kombinované formě.

1a Rozhodněte, zda je posloupnost monotonní (tj. rostoucí, klesající, nerostoucí či neklesající).

$$\left\{\frac{2n-3}{n-1}\right\}_{n=2}^{\infty}$$

1b

$$\{n^2-3n+2\}_{n=1}^{\infty}$$

1c

$$\{(n-1)(n-2)\}_{n=1}^{\infty}$$

2a Zjistěte, zda je množina shora omezená

$$M=\left\{\frac{2n-3}{n-1} : n\in\mathbb{N}, n\geq 2\right\}$$

2b

$$M=\{n^2-3n+2 : n\in\mathbb{N}^+\}$$

2c

$$M=\{(n-1)(n-2) : n\in\mathbb{N}^+\}$$

3a Určete supremum množiny

$$M=\left\{2-\frac{1}{n-1} : n\in\mathbb{N}, n\geq 2\right\}$$

3b

$$M=\left\{\frac{2n-3}{n-1} : n\in\mathbb{N}, n\geq 2\right\}$$

3c

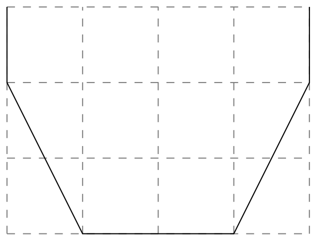
$$M=\left\{\frac{3n-2}{n+2} : n\in\mathbb{N}\right\}$$

4b Na obrázku je znázorněn průřez rotačně symetrickou nádobou v jednotkové mřížce.

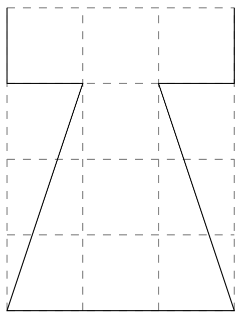
(a) Definujte funkce S, V, které charakterizují, jakým způsobem plocha hladiny a objem pod hladinou závisejí na výšce hladiny h.

(b) Načrtněte graf funkce S.

(c) Výpočtěte derivaci V'. Jak tuto derivaci použijete k ověření správnosti výpočtu?



4c



5a Vypočtěte derivaci funkce f. K výpočtu použijte definici derivace. Výsledek pak zkontrolujte derivací podle vzorců.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

6a Použijte pravidlo pro derivaci složené funkce k výpočtu derivace funkce f.

Návod: převrácenou hodnotu napište jako mocninu s exponentem -1.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 5}$$

6b

$$f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

6c

$$f(x) = \frac{1}{g(x)}$$

7. Odvoďte vzorec pro derivaci podílu úpravou podílu na součin. Použijte pravidlo pro derivaci součinu a výsledek předchozí úlohy

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\,(g(x))^{-1}$$

8. Odvoďte vzorec pro derivaci mocniny se záporným celým exponentem $(x^{-n})'$.

9. Odvoďte vzorec pro derivaci mocniny s racionálním exponentem $(\sqrt[m]{x^n})'$.