Úlohy na cvičení z AN1

6. listopadu 2024

Poznámka: úlohy 1 a 4 až 9 jsou zopakovány ze starších cvičení. Přitom úlohy 5 až 9 jsou vyřešené ve videích, odkaz na videa je na webu předmětu u přednášky 3. října a na elearningu u informace o výuce 21. září pro studenty v kombinované formě.

1a Určete supremum množiny

$$M = \left\{ 2 - \frac{1}{n-1} : n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \right\}$$

1b

$$M = \left\{ \frac{2n-3}{n-1} : n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \right\}$$

1c

$$M = \left\{ \frac{3n-2}{n+2} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

2. Načrtněte graf konstantní posloupnosti $a_n = c$ a ukažte, že její limita je rovna c.

3a Vypočtěte limitu posloupnosti. jednotlivé kroky výpočtu zdůvodněte.

$$\lim \frac{3 - 1/n^2}{4 - 2/n^3}$$

3b

$$\lim \frac{3n^3 - n}{4n^3 - 2}$$

3c

$$\lim \frac{n^4 + 1}{2 - 3n^4}$$

3d

$$\lim \frac{n^2 + 1}{2 - 3n^4}$$

3e

$$\lim \frac{(n+1)^3 + (2n+1)^4}{n^4 + 1}$$

3f

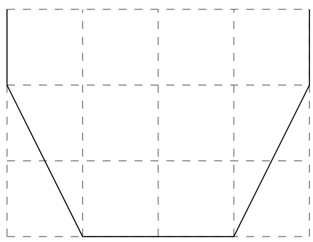
$$\lim \frac{(n^2+1)^3 + (n^3+1)^2}{(n+3)^4 + n^6}$$

4b Na obrázku je znázorněn průřez rotačně symetrickou nádobou v jednotkové mřížce.

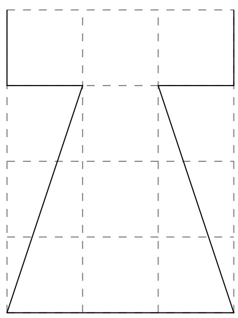
(a) Definujte funkce S, V, které charakterizují, jakým způsobem plocha hladiny a objem pod hladinou závisejí na výšce hladiny h.

(b) Načrtněte graf funkce S.

(c) Výpočtěte derivaci V'. Jak tuto derivaci použijete k ověření správnosti výpočtu?



4c



5a Vypočtěte derivaci funkce f. K výpočtu použijte definici derivace. Výsledek pak zkontrolujte derivací podle vzorců.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

6a Použijte pravidlo pro derivaci složené funkce k výpočtu derivace funkce f.

Návod: převrácenou hodnotu napište jako mocninu s exponentem -1.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 5}$$

6b

$$f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}$$

6c

$$f(x) = \frac{1}{g(x)}$$

7. Odvoďte vzorec pro derivaci podílu úpravou podílu na součin. Použijte pravidlo pro derivaci součinu a výsledek předchozí úlohy

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\,(g(x))^{-1}$$

8. Odvoďte vzorec pro derivaci mocniny se záporným celým exponentem $(x^{-n})'$.

9. Odvoďte vzorec pro derivaci mocniny s racionálním exponentem $(\sqrt[m]{x^n})'$.