

Úlohy na cvičení z AN1  
27. listopadu 2024

Poznámka: úlohy 5 až 11 jsou zopakovány ze starších cvičení.

1. Na přednášce jsme ukázali, že funkce  $f_3(x) = x^3$  je rostoucí na množině  $\mathbb{R}$ .

Ukažte, že funkce  $f_4(x) = x^4$  je rostoucí na intervalu  $[0, \infty)$  a klesající na intervalu  $(-\infty, 0]$ .

Dále ukažte, že funkce  $f_5(x) = x^5$  je rostoucí na množině  $\mathbb{R}$ .

2. Nechť  $n \in \mathbb{N}$  je liché číslo.

Dokažte indukční krok:

$$\text{jestliže } (-x)^n = -x^n, \quad \text{pak } (-x)^{n+1} = x^{n+1}$$

3. Nechť  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  $[a, b]$  je uzavřený interval, funkce  $f$  je klesající na svém definičním oboru  $D(f) = [a, b]$ . Nechť je obor hodnot funkce  $f$  interval  $H(f) = [f(b), f(a)]$  a nechť  $x_0 \in (a, b)$ .

Ukažte, že je funkce  $f$  spojitá v bodě  $x_0$ .

4. Ukažte, že nerovnosti s nezápornými členy lze násobit, tj, že pro  $a, b, c, d \in [0, \infty)$  platí

$$(a > b \wedge c > d) \Rightarrow ac > bd$$

5g Vypočtete limitu posloupnosti. jednotlivé kroky výpočtu zdůvodněte.

$$\lim \frac{(n^4 - n)^2}{(n + 1)^7 + (2n + 1)^8}$$

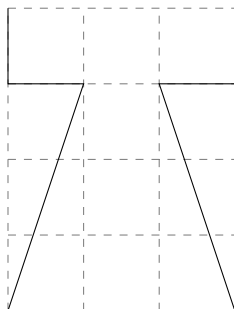
5h

$$\lim \frac{(n^3 + 1)^2 - (n^2 + 1)^3}{(n + 2)^7}$$

6c Na obrázku je znázorněn průřez rotačně symetrickou nádobou v jednotkové mřížce.

- (a) Definujte funkce  $S$ ,  $V$ , které charakterizují, jakým způsobem plocha hladiny a objem pod hladinou závisejí na výšce hladiny  $h$ .
- (b) Načrtněte graf funkce  $S$ .

- (c) Vypočtete derivaci  $V'$ . Jak tuto derivaci použijete k ověření správnosti výpočtu?



- 7a Vypočtete derivaci funkce  $f$ . K výpočtu použijte definici derivace. Výsledek pak zkontrolujte derivací podle vzorců.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

- 8a Použijte pravidlo pro derivaci složené funkce k výpočtu derivace funkce  $f$ .  
Návod: převrácenou hodnotu napište jako mocninu s exponentem  $-1$ .

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 5}$$

8b

$$f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

8c

$$f(x) = \frac{1}{g(x)}$$

9. Odvoďte vzorec pro derivaci podílu úpravou podílu na součin. Použijte pravidlo pro derivaci součinu a výsledek předchozí úlohy

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) (g(x))^{-1}$$

10. Odvoďte vzorec pro derivaci mocniny se záporným celým exponentem  $(x^{-n})'$ .
11. Odvoďte vzorec pro derivaci mocniny s racionálním exponentem  $(\sqrt[m]{x^n})'$ .