

Úlohy na cvičení z AN1
4. prosince 2024

Poznámka: úlohy 4 až 11 jsou zopakovány ze starších cvičení.

1. Ukažte, že pro $n \in \mathbb{N}$, n liché, $n \geq 3$ má funkce $f(x) = \sqrt[n]{x}$ vlastnosti

- (a) $D(f) = \mathbb{R}$
- (b) $H(f) = \mathbb{R}$
- (c) f je rostoucí na $D(f)$
- (d) f je spojitá na $D(f)$
- (e) f je lichá

2a Vysvětlete, za jakých podmínek je umocňování nerovnice ekvivalentní úprava. Pomocí ekvivalentních úprav vyřešte nerovnici

$$\sqrt{2x^2 + 7} \leq 2x - 1$$

2b

$$\sqrt{4x + 1} \geq x + 1$$

2c

$$\sqrt{7 - 3x^2} \geq x + 1$$

3a Vypočtěte limity

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2}, \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2}$$

3b

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a}$$

3c

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x + a}, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$$

3d

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x^2 - 1}$$

4. Na minulém cvičení jsme ukázali, že funkce $f_4(x) = x^4$ je rostoucí na intervalu $[0, \infty)$ a klesající na intervalu $(-\infty, 0]$.

Ukažte, že funkce $f_5(x) = x^5$ je rostoucí na množině \mathbb{R} .

5g Vypočtete limitu posloupnosti. jednotlivé kroky výpočtu zdůvodněte.

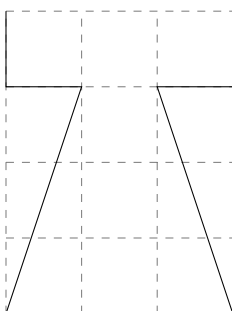
$$\lim \frac{(n^4 - n)^2}{(n + 1)^7 + (2n + 1)^8}$$

5h

$$\lim \frac{(n^3 + 1)^2 - (n^2 + 1)^3}{(n + 2)^7}$$

6c Na obrázku je znázorněn průřez rotačně symetrickou nádobou v jednotkové mřížce.

- (a) Definujte funkce S , V , které charakterizují, jakým způsobem plocha hladiny a objem pod hladinou závisí na výšce hladiny h .
- (b) Načrtněte graf funkce S .
- (c) Vypočtete derivaci V' . Jak tuto derivaci použijete k ověření správnosti výpočtu?



7a Vypočtete derivaci funkce f . K výpočtu použijte definici derivace. Výsledek pak zkontrolujte derivací podle vzorců.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

8a Použijte pravidlo pro derivaci složené funkce k výpočtu derivace funkce f .
Návod: převrácenou hodnotu napište jako mocninu s exponentem -1 .

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 5}$$

8b

$$f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

8c

$$f(x) = \frac{1}{g(x)}$$

9. Odvoďte vzorec pro derivaci podílu úpravou podílu na součin. Použijte pravidlo pro derivaci součinu a výsledek předchozí úlohy

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) (g(x))^{-1}$$

10. Odvoďte vzorec pro derivaci mocniny se záporným celým exponentem $(x^{-n})'$.
11. Odvoďte vzorec pro derivaci mocniny s racionálním exponentem $(\sqrt[n]{x^n})'$.