Derivace funkce – výlet za Newtonem do 17. století

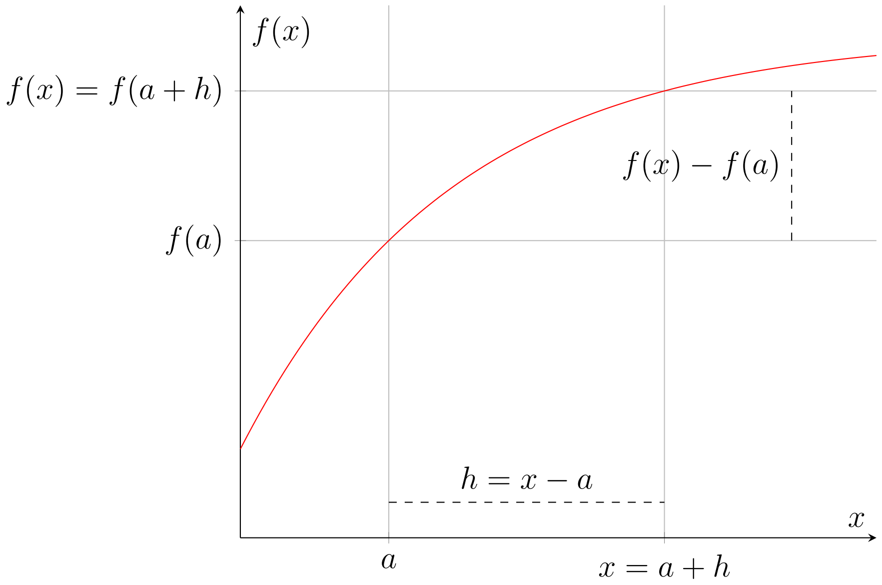
8. října 2024

Definice: *Derivací funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ podle Newtona* nazveme číslo, které dostaneme z výrazu $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ po pokrácení h a dosazením $h = 0$.[1] Tuto derivaci značíme $f'(a)$.

Označíme-li $x = a + h$, dostaneme odtud $h = x - a$ a

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Na grafu funkce f je čitatel $f(a+h)-f(a) = f(x)-f(a)$ roven přírůstku funkce a jmenovatel $h = x - a$ přírůstku proměnné x.



Poznámka ke značení: přírůstek h proměnné x také někdy budeme značit Δx a pokud budeme chtít zdůraznit, že je tento přírůstek „nekonečně malý“, tak ho označíme $\mathrm{d}x$. Obojí toto značení (tedy Δx, $\mathrm{d}x$) se běžně používá ve fyzice. V matematice je častější h, $x - a$.
Nekonečně malý přírůstek funkce pak značíme $\mathrm{d}f$, nebo také $\mathrm{d}y$. Derivaci pak píšeme jako podíl nekonečně malých přírůstků

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

Podíl malých přírůstků, ale nikoliv nekonečně malých, je pak přibližnou hodnotu derivace

$$f'(x) \doteq \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

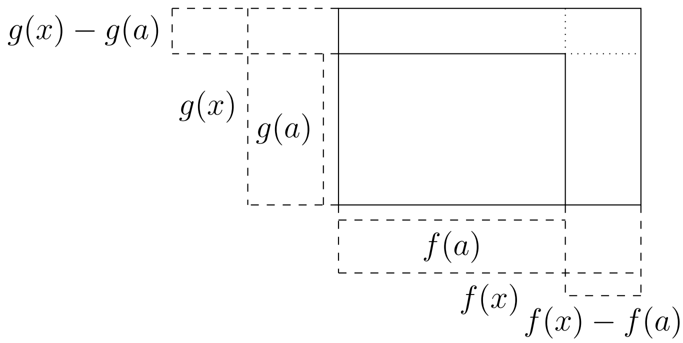
[1] V závěru dosazujeme $h = 0$, což je v rozporu s tím, že na začátku dělíme h. Za Newtonových dob bylo takové h považované za nekonečně malé, ale nenulové číslo.

Od počátku 19. století se derivace definuje $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ nebo $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Definice: Přímku o rovnici $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ nazýváme *tečnou ke grafu funkce f v bodě a.*

Úlohy:

1. Spočítejte následující derivace přímo z definice, napište rovnici příslušné tečny, nakreslete graf funkce i s tečnou.
   (a) $f(x) = x^2$, $f'(3) = ?$
   (b) $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$, $f'(2) = ?$
   (c) $f(x) = 4x^2 + 6$, $f'(-2) = ?$
   (d) $f(x) = x^3$, $f'(1) = ?$
   (e) $f(x) = 2x - 5$, $f'(4) = ?$
2. Odvoďte vzorce
   (a) Pro $f(x) = x$ je $f'(a) = 1$
   (b) Pro $f(x) = x^2$ je $f'(a) = 2a$
   (c) Pro $f(x) = x^3$ je $f'(a) = 3a^2$
   (d) Pro $f(x) = k$ (f je konstantní funkce) je $f'(a) = 0$
   (e) Pro $f(x) = ax + b$ je $f'(x) = a$
   (f) Pro funkce g, h a funkci $f(x) = g(x) + h(x)$ je $f'(a) = g'(a) + h'(a)$
   (g) Pro funkci f, konstantu c a funkci $g(x) = cf(x)$ je $g'(a) = cf'(a)$
3. Použijte vzorce z úlohy 2 k řešení úlohy 1.
4. Spočítejte následující derivace přímo z definice, napište rovnici příslušné tečny, nakreslete graf funkce i s tečnou.
   (a) $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(1) = ?$
   (b) $f(x) = \sqrt{2x+5}$, $f'(2) = ?$
   (c) $f(x) = \sqrt{5-x}$, $f'(1) = ?$
5. Odvoďte vzorec pro derivaci součinu $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$. Návod: Rozdíl $f(x)g(x) - f(a)g(a)$ odvoďte pomocí obsahů obdélníků, jednoho o stranách $f(a)$, $g(a)$ a druhého o stranách $f(x) = f(a+h)$, $g(x) = g(a+h)$. Rozdíl obsahů těchto dvou obdélníků určete graficky a zkontrolujte výpočtem.



$$f(x)g(x) - f(a)g(a) = (f(x) - f(a))g(a) + \\ (f(x) - f(a))(g(x) - g(a)) + f(a)(g(x) - g(a))$$

Definice: *Derivací funkce* f nazýváme funkci f', která číslu a přiřadí hodnotu $f'(a)$ (tedy derivaci f v bodě a).

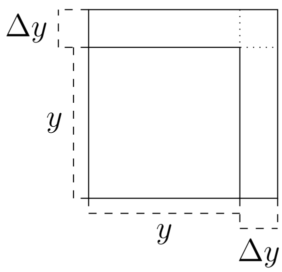
Úlohy:

6. Vzorec pro derivaci součinu použijte k odvození vzorce $(x^n)' = nx^{n-1}$ pro $n \in \mathbb{N}$. K důkazu použijte matematickou indukci.

7. Odvoďte vzorec[2] $(\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x})$

   (a) Použijte definici derivace.

   (b) Výpočet lze znázornit na čtverci o straně $y = \sqrt{x}$ a obsahu x. Větší čtverec má stranu $y + \Delta y$ a obsah $x + \Delta x$. Odtud odvodíme $\Delta x = 2y\Delta y + (\Delta y)^2$.

   Zanedbáním členu druhého řádu $(\Delta y)^2$ dostaneme $\Delta x \doteq 2y\Delta y$ a odtud $\Delta y/\Delta x \doteq 1/(2y)$.

   Pro nekonečně malé přírůstky platí rovnosti $\mathrm{d}x = 2y\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 1/(2y)$.

8. Použijte vzorec z úlohy 7 k řešení úlohy 4a.

9. Odvoďte vzorec přímo z definice derivace

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

[2]Všimněte si formální shody se vzorcem $(x^n)' = nx^{n-1}$ pro $n = 1/2$.

10. Odvodíme vzorec pro derivaci složené funkce

$$\left(f(g(x))\right)'(a) = f'(g(a))g'(a)$$

K ilustraci odvození použijeme úlohu o tlaku závaží působícího silou na desku čtvercového tvaru o straně a. Zajímá nás, jak se změní tlak, změníme-li strany čtverce na $a + \mathrm{d}a$.

Složenou funkci $p = f(g(a))$ rozložíme na vnější funkci $p = f(S)$ a vnitřní funkci $S = g(a)$. Derivaci vnější a vnitřní funkce napíšeme pomocí podílů nekonečně malých přírůstků

$$f'(S) = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}S}, \qquad g'(a) = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}a}$$

Derivaci složené funkce napíšeme podobně

$$(f(g(a)))' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}a}$$

Ze vztahu (pokrácení nekonečně malých přírůstků)

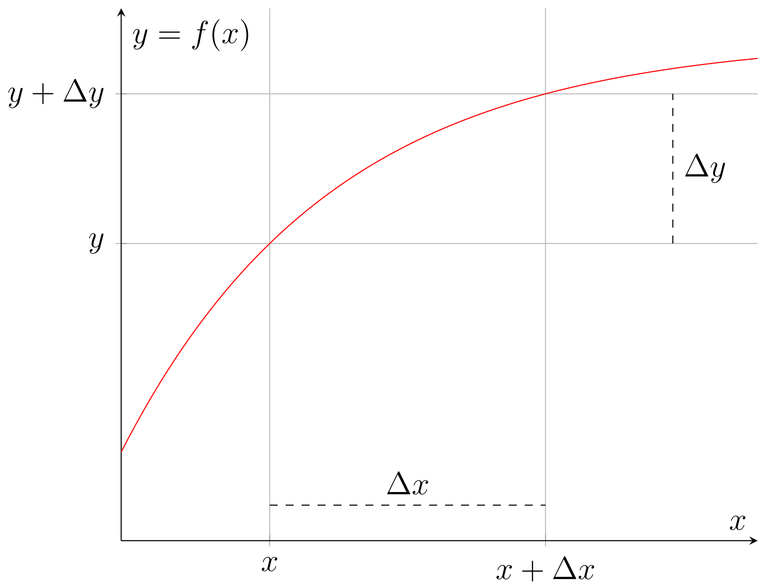
$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}S}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}a} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}a}$$

odvodíme pravidlo pro derivaci složené funkce

$$(f(g(a)))' = f'(S)g'(a)$$

11. Použijte vzorce z úloh 7, 10 k řešení úloh 4.

12. Označme funkci inverzní k funkci $y = f(x)$ symbolem $x = g(y)$. Odvodíme vzorec pro derivaci inverzní funkce $g'(y)$



Derivace funkce f je rovna podílu přírůstků

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

V inverzní funkci g si proměnné x, y vymění role. Proto je derivace inverzní funkce rovna

$$g'(y) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$$

Odtud dostaneme

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Dosazením $x = g(y)$ dostaneme pravidlo pro derivaci inverzní funkce g

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$$

13. Vzorce pro derivaci inverzní funkce použijte k odvození vzorce pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n} x^{-1+1/n}$$

14. Použijte vzorec pro derivaci součinu, složené funkce a převrácené hodnoty k odvození vzorce pro derivaci podílu[3]

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

15. Odvoďte vzorec pro $n \in \mathbb{N}$

$$\left(x^{-n}\right)' = -nx^{-n-1}$$

16. Odvoďte vzorce

$$\left(\sqrt[n]{x^m}\right)' = \frac{m}{n} x^{-1+m/n}, \qquad \left(\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}\right)' = -\frac{m}{n} x^{-1-m/n}$$

17. Ukažte, že pro racionální číslo q platí

$$(x^q)' = qx^{q-1}$$

18a Pravoúhlý trojúhelník má odvěsny velikosti $|BC| = a$, $|AC| = b$. Ve vzdálenosti x od vrcholu B vedeme kolmici na odvěsnu BC. Tato kolmice rozdělí ΔABC na menší trojúhelník a lichoběžník.

Vyjádřete obsah lichoběžníku i menšího pravoúhlého trojúhelníku jako funkci proměnné x.

Vypočtěte derivace těchto funkcí dvěma způsoby: s použitím vzorců a geometrickou úvahou.

[3]Podíl f/g převeďte na součin fg^{-1}.

18b Kužel má poloměr podstavy r a výšku v. Ve vzdálenosti x od vrcholu kužele vedeme rovinu kolmou k ose kužele. Tato rovina rozdělí kužel na dvě části: menší kužel a komolý kužel.

Vyjádřete objem obou těles (menšího kužele a komolého kužele) jako funkci proměnné x.

Tyto funkce zderivujte podle x dvěma způsoby: s použitím vzorců a geometrickou úvahou.

18c V kapitole 2.2 učebního textu jsme odvodili funkci popisující závislost objemu tekutiny na výšce hladiny

$$V(h) = \begin{cases} \pi(225h + \frac{15}{2}h^2 + \frac{1}{12}h^3) & h \in [0, 10] \\ \pi(900h - 5916.\overline{3}) & h \in (10, 35] \end{cases}$$

Vypočtěte derivaci $V'(h)$, ukažte, že se rovná obsahu hladiny $S(h)$ ve výšce h a vysvětlete, že to není náhoda. Derivaci V' počítejte s použitím vzorců.

18d–f Totéž pro další tři nádoby z kapitoly 2.2.

Závěrem: Odvodili jsme vzorce

1. derivace mocniny s racionálním exponentem $(x^q)' = qx^{q-1}$
2. derivace součtu je součet derivací $(f + g)' = f' + g'$
3. derivace násobku je násobek derivace $(cf)' = cf'$
4. derivace součinu $(fg)' = f'g + fg'$
5. derivace podílu $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$
6. derivace složené funkce $(f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$
7. derivace inverzní funkce $(f^{-1})'(x) = 1/f'(f^{-1}(x))$