Derivace funkce

text pro studenty FP TUL

18. prosince 2024

Martina Šimůnková

Definice derivace. Nechť $a \in \mathbb{R}$, f je funkce. Derivací funkce f v bodě a budeme nazývat limitu

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{1}$$

Derivací funkce f v bodě a zprava budeme nazývat limitu

$$f'_{+}(a) = \lim_{x \to a^{+}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{2}$$

Derivací funkce f v bodě a zprava budeme nazývat limitu

$$f'_{-}(a) = \lim_{x \to a^{-}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{3}$$

Poznámky.

1. Substitucí $t = x - a$ (odtud odvodíme $x = a + t$) v limitách (1) až (3) dostaneme

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} \\ f'_{+}(a) &= \lim_{t \to 0^{+}} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} \\ f'_{-}(a) &= \lim_{t \to 0^{-}} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} \end{aligned}$$

2. Nutnou podmínkou existence derivace funkce f v bodě a je existence $\delta > 0$ takového, že $U_{\delta}(a) \subseteq D(f)$. Funkce tedy musí být definovaná na okolí bodu a, aby mohla mít v bodě a derivaci.

3. Nutnou podmínkou existence derivace funkce f v bodě a zprava je existence $\delta > 0$ takového, že $[a, a + \delta) \subseteq D(f)$. Funkce tedy musí být definovaná na pravém okolí bodu a a v bodě a, aby mohla mít v bodě a derivaci zprava.

4. Nutnou podmínkou existence derivace funkce f v bodě a zleva je existence $\delta > 0$ takového, že $(a-\delta, a] \subseteq D(f)$. Funkce tedy musí být definovaná na levém okolí bodu a a v bodě a, aby mohla mít v bodě a derivaci zleva.

5. Zároveň hodnota derivace závisí jen na funkčních hodnonách v těchto okolích:

   Pokud je $f(x) = g(x)$ pro $x \in U_\delta(a)$, pak je $f'(a) = g'(a)$.

   Pokud je $f(x) = g(x)$ pro $x \in [a, a+\delta)$, pak je $f'_+(a) = g'_+(a)$.

   Pokud je $f(x) = g(x)$ pro $x \in (a-\delta, a]$, pak je $f'_-(a) = g'_-(a)$.

Příklad. Funkce f je dána vztahem

$$f(x) = |x^2 - 1|$$

Budeme počítat derivace (i jednostranné) funkce f v bodě $a = 1$.

Pro $x \in (1, 1+\delta)$ (pravé okolí bodu $a = 1$) je $x^2 - 1 > 0$, a tedy $f(x) = x^2 - 1$. Odtud (použijeme poznámku 5) je $f'_+(x) = 2x$ pro $x \geq 1$, a tedy $f'_+(1) = 2$.

Pro $x \in (1-\delta, 1)$ (levé okolí bodu $a = 1$) je $x^2 - 1 < 0$, a tedy $f(x) = -x^2 + 1$. Odtud (opět použijeme poznámku 5) je $f'_-(x) = -2x$ pro $x \geq 1$, a tedy $f'_-(1) = -2$.

Protože je $f'_+(1) \neq f'_-(1)$, tak funkce f nemá v bodě $a = 1$ derivaci.

Úkol. Načrtněte graf funkcí $g(x) = x^2 - 1$, $f(x) = |x^2 - 1|$ spolu s tečnou/tečnami v bodě $a = 1$.

Definice diferencovatelné funkce. Řekneme, že funkce f je diferencovatelná v bodě $a \in \mathbb{R}$, pokud má v bodě a derivaci $f'(a) \in \mathbb{R}$.

Věta o spojitosti a diferencovatelnosti. Pokud je funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ diferencovatelná, pak je v bodě a spojitá.

Důkaz. Protože je funkce f diferencovatelná v bodě a, existuje limita

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Odtud a z věty o aritmetice limit dostaneme existenci limity

$$\lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \to a} (x - a) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} =$$

$$\lim_{x \to a} (x - a) \; \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0 \cdot f'(a) = 0$$

Odtud dostaneme

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

a odtud plyne, že f je spojitá v bodě a.