Okolí bodu a spojitost funkce

Okolí bodu $a \in \mathbb{R}$: (všechna ε jsou kladná čísla)
okolí $U_\varepsilon(a) \equiv (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ obsahuje čísla, která jsou na číselné ose od a vzdálená o méně než ε
pravé okolí $(a, a+\varepsilon)$ obsahuje čísla z okolí $U_\varepsilon(a)$, která jsou větší než a
levé okolí $(a-\varepsilon, a)$ obsahuje čísla z okolí $U_\varepsilon(a)$, která jsou menší než a

Poznámky k pojmu okolí:
1. Písmeno U označující okolí je z německého slova umgebung.
2. Více nás zajímají taková okolí, která obsahují jen jeho blízké body, tedy pro malé hodnoty ε (znázorněte si okolí na číselné ose).

Rozmyslete si:

1. $|x-2| < 3$ je ekvivalentní s $x \in (2-3, 2+3)$, po úpravě $x \in (-1, 5)$.
2. Obecněji $|x-a| < \delta$ je ekvivalentní s $x \in (a-\delta, a+\delta)$
3. Odtud plyne, že platí

$$x \in U_\varepsilon(a) \Longleftrightarrow |x-a| < \varepsilon$$

Definice spojitosti funkce v bodě.
Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$, pokud platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in U_\delta(a))(f(x) \in U_\varepsilon(f(a)))$$

Čteme: Pro každé epsilon kladné existuje delta kladné takové, že pro všechna x z delta okolí bodu a je $f(x)$ prvkem epsilon okolí bodu $f(a)$.

Pokud zaměníme delta okolí $U_\delta(a)$ za pravé okolí bodu a, dostaneme spojitost zprava. Podobně pro spojitost zleva.

Definice spojitosti funkce v bodě zprava.
Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$ zprava, pokud platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (a, a+\delta))(f(x) \in U_\varepsilon(f(a)))$$

Definice spojitosti funkce v bodě zleva.
Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$ zprava, pokud platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (a-\delta, a))(f(x) \in U_\varepsilon(f(a)))$$

Definice spojitosti funkce na intervalu.
Řekneme, že funkce f je spojitá na otevřeném intervalu (a, b), pokud je spojitá v každémm bodě $x \in (a, b)$.
Řekneme, že funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$, pokud je spojitá na intervalu (a, b), v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva.
Řekneme, že funkce f je spojitá na intervalu $(a, b]$, pokud je spojitá na intervalu (a, b) a v bodě b je spojitá zleva.
Řekneme, že funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b)$, pokud je spojitá na intervalu (a, b) a v bodě a je spojitá zprava.