Věta o aritmetice limit (VAL)

Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jsou konvergentní posloupnosti s limitami

$$\lim a_n = a, \quad \lim b_n = b.$$

Pak $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n b_n\}$ jsou konvergentní a

$$\lim (a_n + b_n) = a + b$$

$$\lim (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

Pokud je $b \neq 0$, pak $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ je konvergentní a platí

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

Hlavní myšlenky důkazu:

1. součet

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad , \quad |b_n - b| < \varepsilon$$

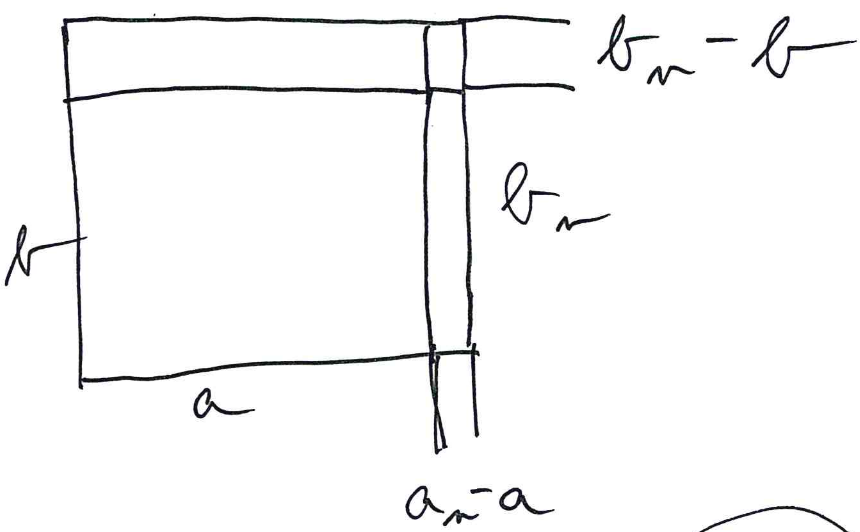
pro „dostatečně velká" n

$$|a_n + b_n - (a+b)| = |\underbrace{a_n - a}_{x} + \underbrace{b_n - b}_{y}| \le$$

$$\le |\underbrace{a_n - a}_{x}| + |\underbrace{b_n - b}_{y}| < 2\varepsilon$$

2. součin

$$|a_n b_n - ab|$$



$$a_n b_n - ab = a(b_n - b) + (a_n - a)(b_n - b) +$$

$$+ (a_n - a) b$$

$$|x + y + z| \le |x| + |y| + |z|$$

$$|a_n b_n - ab| \le |a(b_n - b)| + |(a_n - a)(b_n - b)| +$$

$$+ |(a_n - a) b|$$

$$|a|\underbrace{|b_n-b|}_{<\varepsilon}+\underbrace{|a_n-a|}_{<\varepsilon}\underbrace{|b_n-b|}_{<\varepsilon}+\underbrace{|a_n-a|}_{<\varepsilon}|b|<$$

$$<|a|\cdot\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon|b|=$$

$$=\varepsilon(|a|+\varepsilon+|b|)$$

lze udělat libovolně malé,

proto $|a_nb_n-ab|$ lze volbou

velkého n udělat

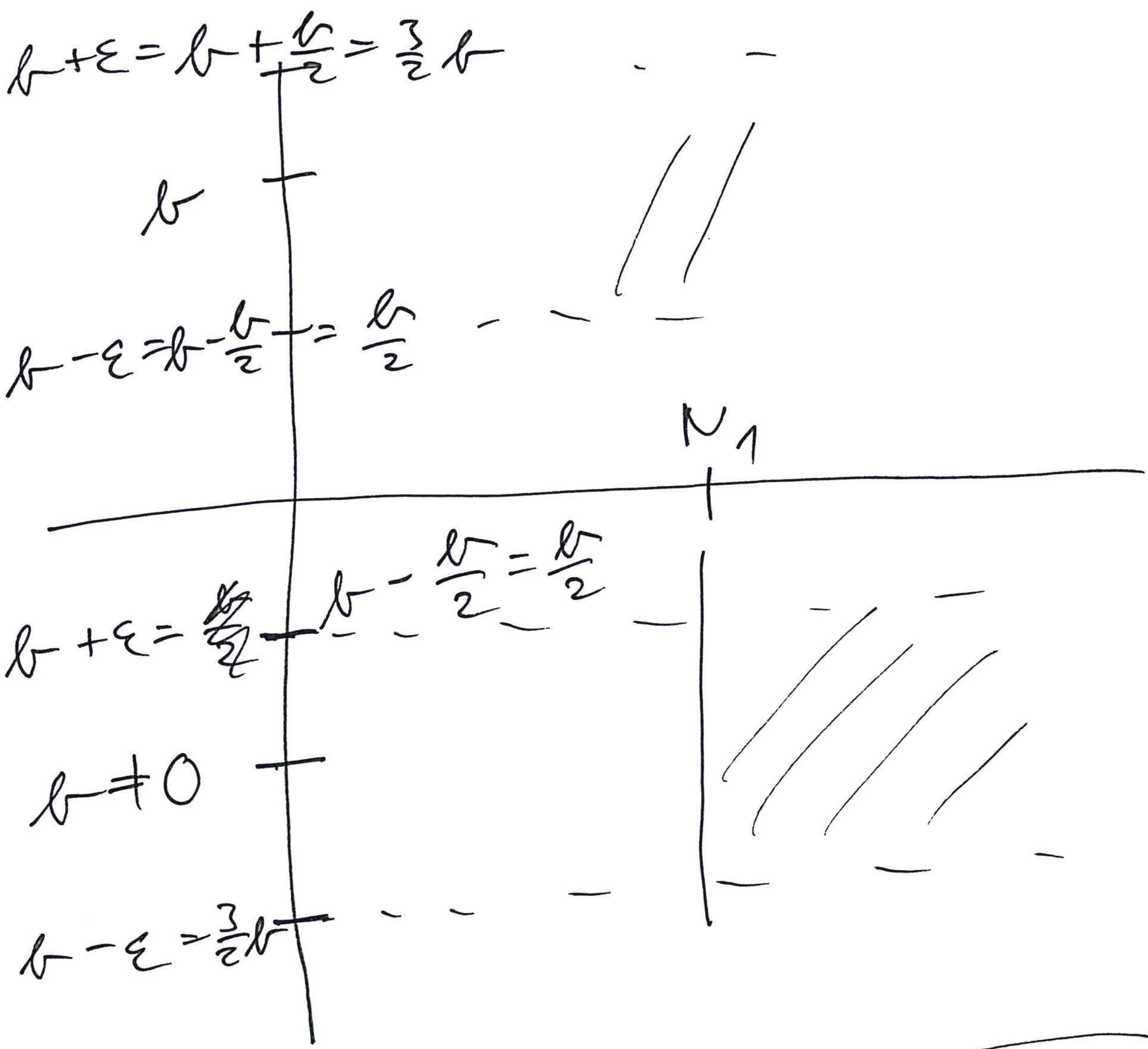
libovolně malé

3. stačí ukázat

$$\lim\frac{1}{b_n}=\frac{1}{b}$$

použijeme tvrzení

$$\lim a_n\frac{1}{b_n}=a\cdot\frac{1}{b}$$



$$\varepsilon_1 = \frac{|b|}{2} \qquad n > N_1 : \ |b_n| > \frac{|b|}{2}$$

tedy $b_n \neq 0$

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b_n b}\right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n|\cdot|b|}$$

$$|b - b_n| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}$$

trochu rychlé – dovysvětleno po videu

VI ~~III~~ 15

$$\frac{|b-b_n|}{|b_n|\cdot|b|} = |b-b_n|\cdot\frac{1}{|b_n|}\cdot\frac{1}{|b|} <$$

$$< \varepsilon\cdot\frac{2}{|b|}\cdot\frac{1}{|b|} = \frac{2\varepsilon}{|b|^2}$$

je malé
pro ε malé

tedy i $\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right|$ je malé

a proto $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$

---

po vidění dotazy:

$$x, y > 0, \quad x < y \quad \Big| : xy > 0$$

$$\frac{x}{xy} < \frac{y}{xy}$$

$$\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$$