Vlastnost suprema reálných čísel

Je-li $M \subseteq \mathbb{R}$, M omezená, pak existuje $s = \sup(M)$, tj. s splňující

$S1$ $(\forall x \in M)(x \leq s)$

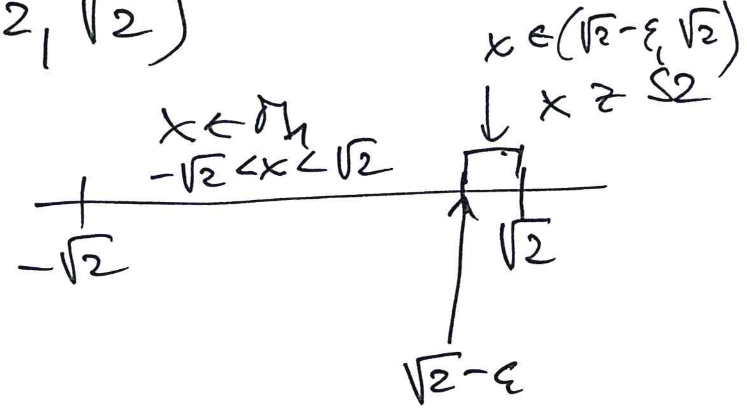
$S2$ $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in M)(x > s - \varepsilon)$

Příklad:

$M_1 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$

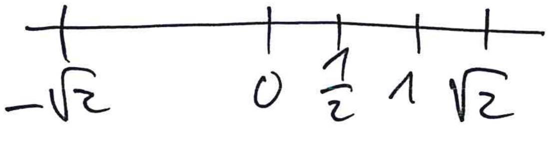
platí: $M_1 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

$\sup(M_1) = \sqrt{2}$



$M_2 = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$

$M_2 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$



Z obrázku vidíme:

$\sqrt{2}$ chybí na ose s racionálními čísly, proto nemá M_2 v $\mathbb{Q}$ supremum

Věta:

Nechť $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ je nerostoucí zdola omezená posloupnost.

Pak je $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ konvergentní a

$$\lim a_n = -\sup\left(\{-a_n : n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0\}\right)$$

Důkaz:

$\underline{b_n = -a_n}$

$\{a_n\}$ nerostoucí: $\quad a_{n+1} \leq a_n \mid \cdot(-1)$

$$-a_{n+1} \geq -a_n$$

$$b_{n+1} \geq b_n$$

tj $\{b_n\}$ je neklesající

$\{a_n\}$ je zdola omezená:

$$(\exists D \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0)(a_n \geq D)$$

$a_n \geq D \mid \cdot(-1)$

$b_n \leq -D \quad \{b_n\}$ je shora omezená pro $n > N$ platí:

1) $a_n \geq a_N$ (posloupnost je neklesající)

a tedy

$a_n > a - \varepsilon$

2) $a_n \leq a$ (S1)

tedy

$a_n < a + \varepsilon$

odtud pro $n > N$:

$a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

tedy $\lim a_n = a$

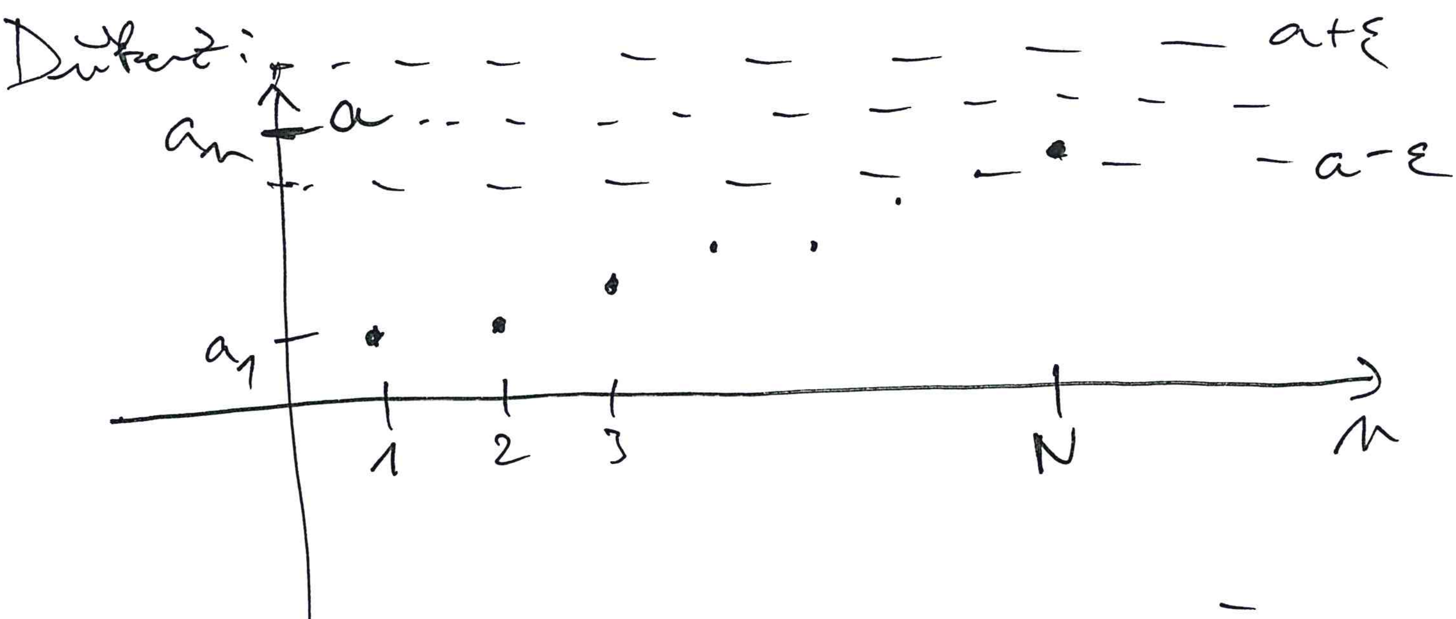
Věta:

Nechť $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ je neklesající shora omezená posloupnost.

Pak je $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ konvergentní a její limita je

$$\lim a_n = \sup(\{a_n : n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0\})$$

Důkaz:



Z vlastnosti suprema plyne, že množina $M = \{a_n : n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0\}$ má supremum $a = \sup(M)$

Zvolme $\varepsilon > 0$: z S2 plyne, že ~~$\exists N \in \mathbb{Z}$, že~~

$\cancel{a_N}$

$$(\exists x \in M)(x > a - \varepsilon)$$

tj. $(\exists N)(a_N > a - \varepsilon)$

$\{b_n\}$ je neklesající shora omezená,

proto je konvergentní (viz předchozí věta)

$$\lim b_n = \underbrace{\sup\left(\{b_n : n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0\}\right)}_{b}$$

~~a~~

ZVAL

$$\lim \underbrace{(-1)\, b_n}_{a_n} = \lim(-1) \cdot \cancel{a} \lim b_n = \cancel{-\sup}\ -1 \cdot b = -b$$

tedy

$$\lim a_n = -b =$$

$$= -\sup\left(\{-a_n : \ldots\}\right)$$