Vztah konvergence a omezenosti

Věta:

Nechť $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ je konvergentní posloupnost.

Pak je $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ omezená.

Důkaz:

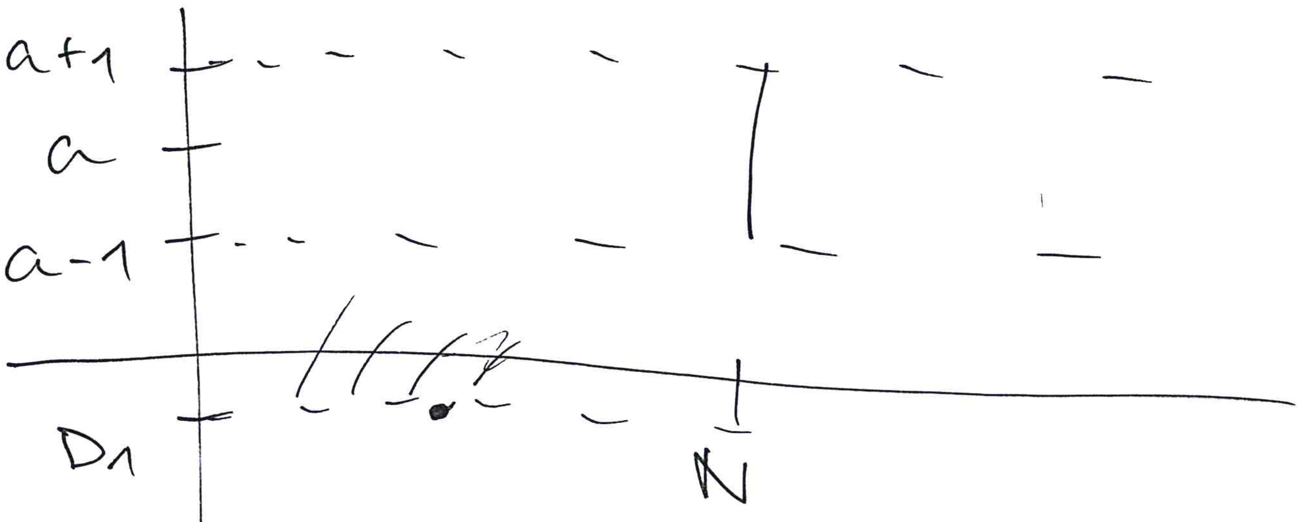
Chceme dokázat:

~~$(\exists D, H \in$~~

$$(\exists D, H \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0)(D \leq a_n \leq H)$$

IX 12

$\{a_n\}$ je konvergentní – zvolíme $\varepsilon = 1$



pro $n > N$ je ~~a_n~~

$$a-1 < a_n < a+1$$

$$D_1 = \min\{a_{n_0}, a_{n_0+1}, \dots, a_N\}$$

$$\underline{D} = \min\{D_1, a-1\}$$

pak $a_n \geq D$ pro $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0$

$$H = \max\{a+1, H_1\},$$

$$H_1 = \max\{a_{n_0}, a_{n_0+1}, \dots, a_N\}$$

H je horní hranice posloupnosti: $a_n \leq H$ pro $n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0$

→ D je dolní — " —

Příklad:

$\{(-1)^n\}$ je omezená $D=-1$

$H=1$

není konvergentní