Posloupnosti reálných čísel

26. listopadu 2024

Definice posloupnosti. Posloupností reálných čísel nazýváme funkci, jejímž definičním oborem je množina přirozených čísel. Funkční hodnotu značíme indexem (např. a_n) a nazýváme ji n-tým členem posloupnosti. Posloupnost značíme symbolem (někteří autoři opužívají kulaté závorky $(a_n)_{n=1}^{\infty}$)

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \text{případně } \{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$$

V obecnějším případě je definičním oborem posloupnosti podmnožina celých čísel začínající indexem $n_0 \in \mathbb{Z}$.

Příklady.

1. Aritmetická posloupnost $\{2n-3\}_{n=0}^{\infty}$ má členy $-3, -1, 1, 3, 5 \dots$.
2. Geometrická posloupnost $\{2^n\}_{n=0}^{\infty}$ má členy $1, 2, 4, 8, \dots$.

Definice monotonní posloupnosti. Posloupnost $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ nazveme
rostoucí posloupností,
pokud pro každé $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0$ platí $a_n < a_{n+1}$,
klesající posloupností,
pokud pro každé $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0$ platí $a_n > a_{n+1}$,
nerostoucí posloupností,
pokud pro každé $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0$ platí $a_n \geq a_{n+1}$,
neklesající posloupností,
pokud pro každé $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0$ platí $a_n \leq a_{n+1}$,
Posloupnost, která je buď nerostoucí nebo neklesající, nazveme monotonní posloupností.

Příklady.

1. Posloupnost $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ má členy $1, 1/2, 1/3, \dots$, proto tipujeme, že je klesající. K důkazu je třeba ukázat[1]

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}$$

Formální důkaz

$$\begin{aligned} &\text{Pro } n \in \mathbb{N} \quad \text{platí } n < n+1, \\ &\text{Nerovnost vydělíme kladným výrazem } n(n+1), \\ &\text{dostaneme } \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \\ &\text{což jsme chtěli dokázat.} \end{aligned}$$

[1] Jiný možný postup je upravit výraz $a_{n+1} - a_n$ do tvaru, ze kterého je vidět, zda je kladný/záporný/nekladný/nezáporný.

Zkušenější studenti mohou důkaz odbýt úvahou, že převrácené hodnoty kladných čísel jsou uspořádány opačně než jsou tato čísla. Na požádání, ale tito studenti umí svoje slova vysvětlit (jejich vysvětlení bude založené n astejných nebo podobných argumentech jako formální důkaz výše).

2. Posloupnost $\{n/(n+1)\}_{n=1}^{\infty}$ má členy $1/2, 2/3, 3/4, \dots$, proto tipujeme, že je rostoucí. Svůj tip dokážeme

$$\begin{aligned} &\text{Chceme ukázat, že pro } n \in \mathbb{N} \quad \text{platí } \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}, && (1) \\ &\text{nerovnost vynásobíme kladným výrazem } (n+1)(n+2), \\ &\text{dostaneme } n(n+2) < (n+1)^2 \\ &\text{po úpravě } n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1 \quad \text{což víme, že platí.} && (2) \end{aligned}$$

Všechny použité úpravy nerovnosti (1) jsou ekvivalentní. Proto z platnosti nerovnosti (2) plyne platnost (1).

3. Posloupnost $\{\sin(n\pi/2)\}_{n=0}^{\infty}$ má členy $0, 1, 0, \dots$. Z prvních třech členů je vidět, že posloupnost není ani rostoucí, ani klesající, ani nerostoucí. ani neklesající. Proto tato posloupnost není monotonní.
4. Posloupnost $\{n(n-1)(n-2)\}_{n=0}^{\infty}$ má členy $0, 0, 0, 6, 24, \dots$, odkud vidíme, že nemůže být ani rostoucí, ani klesající, ani nerostoucí.

   Ukážeme, že posloupnost je od čtvrtého členu rostoucí, odkud plyne, že je neklesající.

$$\begin{aligned} &\text{Chceme ukázat, že pro } n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \\ &\text{platí } n(n-1)(n-2) < (n+1)n(n-1). && (3) \\ &\text{Začneme nerovností } n-2 < n+1 \quad \text{která platí pro } n \in \mathbb{N} && (4) \\ &\text{Nerovnost (4) vynásobíme kladným výrazem } n(n-1) \\ &\text{a dostaneme nerovnost (3).} \end{aligned}$$

Rozmyslete si, že platí.

1. Je-li posloupnost $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ klesající, pak je i nerostoucí.
2. Je-li posloupnost $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ rostoucí, pak je i neklesající.

Definice omezené posloupnosti. Posloupnost $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ nazveme
shora omezenou,
pokud $\exists H \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0$ platí $a_n \leq H$,
zdola omezenou,
pokud $\exists D \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0$ platí $a_n \geq D$,
omezenou,
pokud je shora omezená i zdola omezená.

Číslo H nazýváme
horní závorou (nebo též horní hranicí) posloupnosti $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$,
číslo D nazýváme
dolní závorou (dolní hranicí) posloupnosti $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$.

Rozmyslete si.

1. Je-li posloupnost rostoucí, pak je zdola omezená a její první člen je její dolní závorou.

2. Je-li posloupnost klesající, pak je shora omezená a její první člen je její horní závorou.

Příklady.

1. Posloupnost $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající, proto je $a_1 = 1$ její horní závora. Číslo $D = 0$ je dolní závora posloupnosti. Posloupnost je tedy omezená.

2. Posloupnost $\{n/(n+1)\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí, proto je $a_1 = 1/2$ její dolní závora. Číslo $H = 1$ je horní závora posloupnosti. Posloupnost je tedy omezená.

3. Posloupnost $\{\sin(n\pi/2)\}_{n=0}^{\infty}$ je omezená, její dolní závorou je $D = -1$, horní závorou je $H = 1$.

4. Posloupnost $\{n(n-1)(n-2)\}_{n=0}^{\infty}$ je zdola omezená, její dolní závorou je $D = 0$.

   Ukážeme, že posloupnost není shora omezená. K tomu stačí ukázat, že[2]

$$(\forall H \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N}_0)(n(n-1)(n-2) > H) \tag{5}$$

   Upravíme n-tý člen posloupnosti a_n vytknutím n z obou závorek

$$a_n = n(n-1)(n-2) = n^3\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$$

   Pro $n \geq 3$ platí

$$n^2 > 1 \tag{6}$$
$$1-\frac{1}{n} > 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4} \tag{7}$$
$$1-\frac{2}{n} > 1-\frac{2}{4} = \frac{1}{2} \tag{8}$$

   Všechny výrazy v nerovnostech jsou kladné. Proto lze (viz následující cvičení) nerovnosti násobit. Vynásobením nerovností (6), (7), (8) dostaneme nerovnost

$$n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) > \frac{3}{8} \tag{9}$$

[2] Více viz následující cvičení.

Nerovnost (9) vynásobíme n

$$n^3\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) > \frac{3n}{8} \tag{10}$$

a tedy (levá strana je rovna a_n)

$$\text{pro } n \geq 3 \quad \text{platí } a_n > \frac{3n}{8} \tag{11}$$

Zvolme nyní n vyhovující (více viz cvičení)

$$n \geq 3 \quad \wedge \quad \frac{3n}{8} > H \tag{12}$$

pak z (11), (12) plyne

$$a_n > H.$$

Dokázali jsme (5) a tedy H není horní závora posloupnosti $\{n(n-1)(n-2)\}_{n=0}^{\infty}$, a tedy posloupnost není shora omezená.

Cvičení.

1. Rozmyslete si, že (5) je formálně zapsaný výrok
   Pro každé $H \in \mathbb{R}$ platí, že H není horní závora posloupnosti $\{n(n-1)(n-2)\}_{n=0}^{\infty}$.

2. **Násobení nerovnic s kladnými členy.**
   Nechť jsou a, b, c, d kladná reálná čísla. dokažte, že pak platí

   $$\text{Pokud je } a > b \text{ a zároveň } c > d, \quad \text{pak platí } ac > bd.$$

   Návod: vynásobte nerovnost $a > b$ kladným číslem c a nerovnost $c > d$ kladným číslem b. Dostanete

   $$ac > bc \quad \wedge \quad cb > db$$

   odkud dostaneme

   $$ac > db.$$

3. **Násobení více nerovnic s kladnými členy.** Nechť jsou a, b, c, d, e, f kladná reálná čísla. Dokažte, že pak platí

   $$(a > b \quad \wedge \quad c > d \quad \wedge \quad e > f) \Rightarrow (ace > bdf).$$

   Návod: použijte předchozí cvičení.

4. Dokažte matematickou indukcí, že je možné násobit i vyšší počet nerovností s kladnými výrazy na stranách nerovnosti.

5. Ukažte, že ke každému $H \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ splňující

$$\frac{3n}{8} > H \tag{13}$$

Návod: Pro $H \leq 0$ lze zvolit $n = 1$. Pro $H > 0$ upravíme (13) na

$$n > \frac{8H}{3}, \tag{14}$$

pravou stranu (14) zaokrouhlíme na nejbližší vyšší celé číslo a přičteme jedničku.

Definice suprema množiny. Řekneme, že číslo s je supremem množiny $M \subseteq \mathbb{R}$, pokud platí

S1. $(\forall x \in M)(x \leq s)$

S2. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in M)(x > s - \varepsilon)$

Zapisujeme $s = \sup(M)$.

Poznámka. Vlastnost S1 znamená, že s je horní závorou množiny M. Vlastnost S2 znamená, že $s - \varepsilon$ není horní závorou množiny M (viz následující cvičení). Dohromady tedy obě vlastnosti znamenají, že s je nejmenší horní závora množiny M.

Cvičení. Ukažte, že výrok $(\exists x \in M)(x > s - \varepsilon)$ je negací výroku: $s - \varepsilon$ je horní závorou množiny M.

Příklady.

1. Ukážeme, že $s = 1$ je supremem množiny $(0, 1)$.

   Vlastnost S1 $(\forall x \in (0,1))(x \leq 1)$ plyne přímo z definice intervalu.

   Pro vlastnost S2 si nakreslete číselnou osu a na ní znázorněte čísla 1, $1 - \varepsilon < 1$. Rozebereme dva různé případy

I

   (a) $\varepsilon < 1/2$: pak je $1 - \varepsilon > 1/2$ a lze zvolit x ležící ve středu úsečky s krajními body $1, 1-\varepsilon$, tedy $x = 1-\varepsilon/2$. Toto x splňuje $x \in (0,1)$, $x > 1 - \varepsilon$.

   (b) $\varepsilon \geq 1/2$: v tomto případě zvolíme $x = 3/4$. Toto x splňuje $x \in (0,1)$, $x > 1 - \varepsilon$.

2. Určíme supremum množiny členů posloupnosti

$$M = \left\{ \frac{n+1}{2n+3} : n \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

   Dvěma způsoby vytvoříme hypotézu o hodnotě suprema $\sup(M)$. Pak pro nalezenou hodnotu ukážeme, že splňuje definici suprema.

(a) Vypočteme několik členů posloupnosti. Budeme postupně dosazovat $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$M = \left\{ \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \frac{6}{13}, \ldots \right\}$$

Ze spočtených členů posloupnosti uděláme hypotézu, že $\sup(M) = 1/2$.

(b) Upravíme (jiný možný postup je dělení mnohočlenu mnohočlenem)

$$\frac{n+1}{2n+3} = \frac{(n+1/2)+1/2}{2(n+1/2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2n+1)}$$

a z výsledku uděláme stejný závěr: $\sup(M) = 1/2$.

Nyní ověříme, že 1/2 splňuje vlastnosti suprema

S1. Nerovnost $a_n \leq 1/2$ v případě (a) ověříme úpravami

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{2n+3} &\leq \frac{1}{2} & &| \cdot 2(2n+3) \\ 2(n+1) &\leq 2n+3 & &| - 2n \\ 1 &\leq 3 \end{aligned}$$

Výsledná nerovnost platí, úpravy nerovnosti jsou pro $n \in \mathbb{N}^+$ ekvivalentní, proto platí i původní nerovnost.

V případě (b) je platnost nerovnosti zřejmá

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2(2n+1)} \leq \frac{1}{2}$$

S2. K $\varepsilon > 0$ hledáme $n \in \mathbb{N}^+$ splňující

$$\frac{n+1}{2n+3} > \frac{1}{2} - \varepsilon$$

Úpravami nerovnosti postupně dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{2n+3} &> \frac{1}{2} - \varepsilon & &| \cdot 2(2n+3) \\ 2(n+1) &> 2n+3-2(2n+3)\varepsilon & &| - (2n+3) \\ -1 &> -2(2n+3)\varepsilon & &| \cdot (-1) < 0 \\ 1 &< 2(2n+3)\varepsilon \\ 1 &< 4n\varepsilon + 3\varepsilon & &| - 3\varepsilon \\ 1 - 3\varepsilon &< 4n\varepsilon & &| : 4\varepsilon > 0 \\ \frac{1}{4\varepsilon} - \frac{3}{4} &< n \end{aligned}$$

Za n lze zvolit například $Z = \lceil 1/(4\varepsilon) - \frac{3}{4} \rceil + 1$, kde symbol $\lceil x \rceil$ značí zaokrouhlení x nahoru na nejbližší celé číslo. Protože posloupnost začíná indexem $n = 1$, zvolíme pro případ $Z < 1$: $n = \max\{Z, 1\}$.

(a) Výše jsme ukázali, že posloupnost $\{1/n\}_{n=n_0}^{\infty}$ je klesající. Odtud plyne, že její supremum je rovno jejímu prvnímu členu $a_1 = 1$.

Maximum množiny. Supremum je v matematické analýze důležitý pojem. Určitým způsobem nahrazuje maximum, které popíšeme vlastnostmi: Číslo m nazýváme maximálním prvkem množiny M (někdy též maximem množiny M), pokud platí

1. $(\forall x \in M)(x \leq m)$
2. $m \in M$

První vlastnost říká, že m je horní závorou množiny M, druhá, že je m prvkem množiny M.

Zapisujeme $m = \max(M)$.

II

Cvičení.

1. Ukažte, že má-li množina M maximum $m = \max(M)$, pak má i supremum a platí $m = \sup(M)$. Návod: S1 plyne přímo z M1. Protože je $m > m - \varepsilon$, plyne S2 z M2.
2. Rozmyslete si, že množiny o konečném počtu prvků[3] mají maximální prvek.
3. Množina členů klesající posloupnosti má maximální prvek rovný prvnímu členu. Například pro posloupnost $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ je maximální prvek množiny
$$M = \{1/n : n \in \mathbb{N}^{+}\}$$
roven $\max(M) = 1$ a zároveň je $\max(M) = \sup(M)$.

Definice konvergentní posloupnosti. Posloupnost $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ nazveme konvergentní posloupností, pokud existuje $a \in \mathbb{R}$, takové, že platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{Z}, n > N)(|a_n - a| < \varepsilon) \tag{15}$$

Číslo a nazýváme limitou posloupnosti a píšeme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

nebo také

$$a_n \longrightarrow a \quad \text{pro } n \to \infty$$

Symbol $n \to \infty$ někdy vynecháváme a píšeme zkráceně

$$\lim a_n = a$$

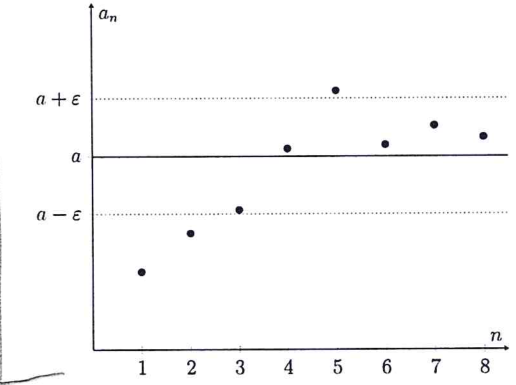
Poznámky k definici konvergentní posloupnosti.

[3] Takové množiny nazýváme konečnými množinami.

1. Podmínku $|a_n - a| < \varepsilon$ můžeme pro $\varepsilon > 0$ nahradit podmínkou
$$a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$
2. Interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ nazýváme ε okolím bodu a, nebo zkráceně jen okolím bodu a a používáme označení
$$U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$
3. Pro číslo N je někdy požadováno $N \in \mathbb{N}$, my jsme uvedli $N \in \mathbb{R}$. Na významu definice to nic nemění. Podmínka $n > N$ pro $n \in \mathbb{Z}$ bude stejná pro například $N = \sqrt{50}$ a pro toto číslo zaokrouhlené na $N = 7$.
4. Při zkoumání definice stačí uvažovat malé hodnoty ε: pokud najdeme N pro například $\varepsilon = 1$, lze v definici použít toto N i pro $\varepsilon > 1$.
5. Protože indexů n nesplňujících podmínku $n > N$ je konečně mnoho, lze výrok (15) přeformulovat: Pro každé $\varepsilon > 0$ platí $|a_n - a|$ až na konečně mnoho členů posloupnosti.
6. Z předchozí poznámky plyne, že se limita posloupnosti nezmění, pokud změníme konečně mnoho členů posloupnosti. Například, pokud změníme index prvního členu posloupnosti. Proto budeme v zápisu posloupnosti často první index vynechávat a $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ zkrátíme na $\{a_n\}$.

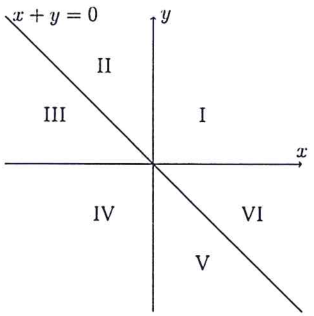
III

Graf k limitě posloupnosti. Grafem posloupnosti je množina bodů o souřadnicích $[n, a_n]$. Níže vidíme část grafu posloupnosti. Na svislé ose je vyznačeno okolí bodu a. Pro $n \in \{3, 4, 6, 7, 8\}$ platí $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Z viditelné části grafu to tedy vypadá, že k tomuto ε je $N = 5$.



Trojúhelníková nerovnost. Nazýváme tak nerovnost $|x + y| \leq |x| + |y|$, která platí pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. Budeme ji často používat v důkazech tvrzení.

Důkaz trojúhelníkové nerovnosti provedeme rozborem případů a odstraněním absolutní hodnoty. Souřadnou rovinu rozdělíme na šest částí.



Ukážeme platnost v částech I, VI, další části necháme čtenáři jako cvičení.

I. Zde je $x \geq 0$, $y \geq 0$, proto je $|x| = x$, $|y| = y$, $|x+y| = x+y$ a tedy platí $|x+y| = |x| + |y|$.

VI. Zde je $x \geq 0$, $y \leq 0$, $x+y \geq 0$ proto je $|x| = x$, $|y| = -y$, $|x+y| = x+y$. Levá strana trojúhelníkové nerovnosti je tedy $L = |x+y| = x+y$, pravá strana $P = |x| + |y| = x - y$.

Protože je $y \leq 0$, je $y \leq -y$, tedy je $L \leq P$ a proto v části VI trojúhelníková nerovnost platí.

Trojúhelníková nerovnost pro tři sčítance. Dvojím použitím trojúhelníkové nerovnosti dostaneme

$$|(x+y)+z| \leq |x+y| + |z| \leq |x| + |y| + |z|$$

Věta o jednoznačnosti limity posloupnosti. Nechť je posloupnost $\{a_n\}$ konvergentní. Pak je její limita určena jednoznačně. Tj., je-li a i b limitou posloupnosti $\{a_n\}$, pak je $a = b$.

Důkaz provedeme sporem. Budeme předpokládat, že $a \neq b$ jsou limitou posloupnosti $\{a_n\}$. Zvolíme $\varepsilon = |a-b|/3$, které je kladné. Z definice plyne existence N_a, N_b takových, že pro $n > N_a$ a zároveň $n > N_b$ (rozmyslete si, že takové n existuje), platí

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad |a_n - b| < \varepsilon$$

Sečtením nerovností dostaneme

$$|a_n - a| + |a_n - b| < 2\varepsilon$$

Zároveň platí

$$3\varepsilon = |a-b| = |a - a_n + a_n - b|$$

Na výraz $|a - a_n + a_n - b|$ použijeme trojúhelníkovou nerovnost (viz text o spojitosti funkce) $|A+B| \leq |A| + |B|$. Dostaneme

$$3\varepsilon = |a-b| \leq |a-a_n| + |a_n - b|$$

Odtud dostáváme $3\varepsilon < 2\varepsilon$, což je spor.

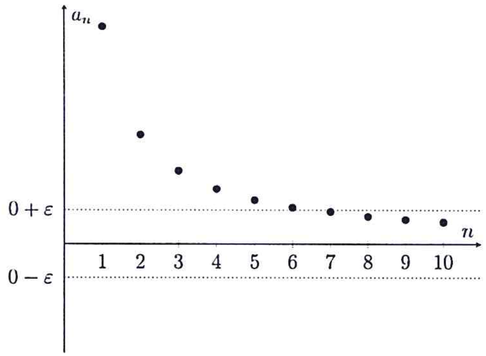
Cvičení. Nakreslete souřadnou soustavu a na osu y vyneste body a, b a okolo nich pásy $y \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $y \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ pro $\varepsilon = |a-b|/3$.

Pokud budete kreslit správně, bude z grafu vidět, že žádné $y \in \mathbb{R}$ nemůže ležet v obou pásech.

Příklady konvergentních posloupností.

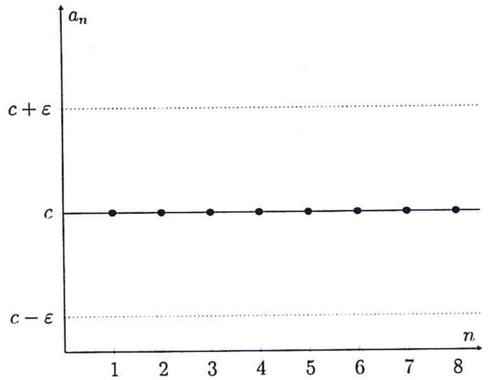
1. Ukážeme, že posloupnost $\{1/n\}$ je konvergentní a její limita je rovna nule.
   Nechť je $\varepsilon > 0$. Řešíme nerovnici $|1/n - 0| < \varepsilon$. Úpravou dostaneme $n > 1/\varepsilon$.
   K dokončení důkazu lze tedy zvolit $N = 1/\varepsilon$.

   Ještě ukážeme situaci na grafu posloupnosti. Na grafu k danému ε je $N = 6$.



2. Ukážeme, že konstantní posloupnost $a_n = c$ má limitu rovnu c.
   Nechť je $\varepsilon > 0$, pak $|a_n - c| < \varepsilon$ platí pro všechna n a můžeme tedy zvolit za N index prvního členu posloupnosti.

   Na grafu situace vypadá následovně:



Věta o aritmetice limit (VAL). Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jsou konvergentní posloupnosti s limitami

$$\lim a_n = a, \quad \lim b_n = b.$$

Pak posloupnosti $\{a_n+b_n\}$, $\{a_nb_n\}$ jsou také konvergentní a jejich limity jsou

$$\lim a_n + b_n = a+b, \tag{16}$$
$$\lim a_nb_n = ab. \tag{17}$$

Je-li navíc $b \neq 0$, je konvergentní i posloupnost $\{a_n/b_n\}$ a její limita je

$$\lim a_n/b_n = a/b. \tag{18}$$

Hlavní myšlenky důkazu VAL. Nechť je $\varepsilon > 0$ Protože je

$$\lim a_n = a, \quad \lim b_n = b,$$

platí pro velké indexy n

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad |b_n - b| < \varepsilon.$$

Použitím trojúhelníkové nerovnosti dostaneme

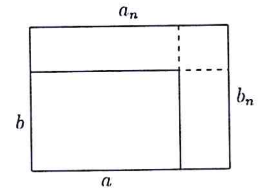
$$|a_n + b_n - a - b| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |(a_n - a)| + |(b_n - b)| < 2\varepsilon$$

Odtud plyne, že výraz $|a_n + b_n - a - b|$ má malé hodnoty pro velké indexy n, a tedy $\lim(a_n + b_n) = a + b$.

Pro důkaz (17) potřebujeme upravit výraz

$$|a_nb_n - ab| \tag{19}$$

K úpravě (19) použijeme obrázek



Z obrázku odvodíme následující rovnost. Její platnost ověřte úpravou pravé strany, protože obrázek nám slouží jen jako inspirace. Předpokládá, že $a_n > a$, $b_n > b$ a my chceme, aby tato rovnost platila i v ostatních případech.

$$a_nb_n - ab = (a_n - a)b + (a_n - a)(b_n - b) + a(b_n - b)$$

K další úpravě použijeme trojúhelníkovou nerovnost

$$\begin{aligned} |a_nb_n - ab| &= |(a_n - a)b + (a_n - a)(b_n - b) + a(b_n - b)| \\ &\leq |(a_n - a)b| + |(a_n - a)(b_n - b)| + |a(b_n - b)| \\ &< \varepsilon|b| + \varepsilon^2 + \varepsilon|a| = \varepsilon(|b| + \varepsilon + |a|) \end{aligned}$$

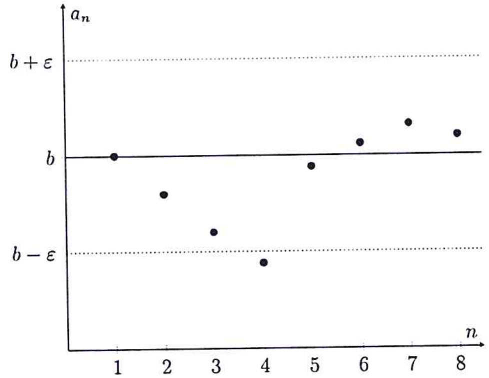
Protože výraz $\varepsilon(|b| + \varepsilon + |a|)$ lze vhodnou volbou ε učinit libovolně malým kladným, je tvrzení o limitě součinu dokázané.

K důkazu tvrzení o limitě podílu (18) stačí ukázat

$$\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b} \tag{20}$$

a použít již dokázané tvrzení pro součin $a_n\frac{1}{b_n}$.

Nejdříve ukážeme, že od jistého indexu počínaje je $b_n \neq 0$ a má tedy smysl výraz $1/b_n$. Na obrázku je graf posloupnosti s vyznačenou limitou $b \neq 0$. Zvolíme $\varepsilon = |b|/2 > 0$.



Z definice limity plyne existence N takového, že pro $n > N$ je $|b_n| > |b|/2$, a tedy je $b_n \neq 0$.

Dále úpravou dostaneme

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b_n b}\right| \tag{21}$$

Z $|b_n| > |b|/2$ plyne $\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}$. Dosazením do (21) dostaneme

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = |b_n - b| \left|\frac{1}{b_n b}\right| < |b_n - b| \left|\frac{2}{b^2}\right|$$

Protože je $|b_n - b|$ malé, je malá i levá strana nerovnosti $|1/b_n - 1/b|$.

Celý důkaz tvrzení. Limita součtu: Zvolme $\varepsilon > 0$. K $\tilde{\varepsilon} \equiv \varepsilon/2$ existují N_a, N_b taková, že je pro $n > N_a$ je $|a_n - a| < \tilde{\varepsilon}$, a pro $n > N_b$ je $|b_n - b| < \tilde{\varepsilon}$. Odtud pro $N = \max\{N_a, N_b\}$ platí

$$|a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < 2\tilde{\varepsilon} = \varepsilon,$$

a proto je $\lim(a_n + b_n) = a + b$.

Limita součinu: Zvolme $\varepsilon > 0$. K $\tilde{\varepsilon} \equiv \min\{\varepsilon/(|a| + |b| + 1), 1\}$ existují (stejně jako u součtu) N_a, N_b taková, že pro $n > N_a$ je $|a_n - a| < \tilde{\varepsilon}$ a pro $n > N_b$ je $|b_n - b| < \tilde{\varepsilon}$. Odtud pro $n > N = \max\{N_a, N_b\}$ platí

$$|a_n b_n - ab| < \tilde{\varepsilon}(|a| + |b| + \tilde{\varepsilon}) \leq \tilde{\varepsilon}(|a| + |b| + 1) \leq \varepsilon,$$

a proto je $\lim(a_n b_n) = ab$.

Limita $1/b_n$: Zvolme $\varepsilon_1 = |b|/2$. Protože je $\varepsilon_1 > 0$, existuje N_1, že pro $n > N_1$ platí

$$|b_n - b| < \varepsilon_1 = |b|/2 \tag{22}$$

Z trojúhelníkové nerovnosti

$$|b| = |b - b_n + b_n| \leq |b - b_n| + |b_n| = |b_n - b| + |b_n|$$

plyne

$$|b_n| \geq |b| - |b_n - b|$$

Odtud a z (22) plyne

$$|b_n| > |b| - |b|/2 = |b|/2$$

a dále

$$\frac{1}{|b_n|} < \frac{1}{|b|/2} = \frac{2}{|b|} \tag{23}$$

Zvolme dále $\varepsilon > 0$. K $\tilde{\varepsilon} = b^2\varepsilon/2$ existuje N takové, že pro $N > n$ platí

$$|b_n - b| < \tilde{\varepsilon}$$

Odtud a z (23) plyne

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n||b|} < \tilde{\varepsilon}\frac{2}{|b|^2} = \varepsilon$$

a odtud plyne (20).

Příklad na použití věty o aritmetice limit. Výše jsme ukázali

$$\lim \frac{1}{n} = 0, \quad \lim c = c.$$

Odtud a z VAL plyne

$$\lim\left(3 - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right) = 3 - 0 \cdot 0, \quad \lim\left(4 + 2\frac{1}{n}\right) = 4 + 2 \cdot 0,$$

a odtud dále

$$\lim \frac{3 - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{4 + 2\frac{1}{n}} = \frac{4}{3}$$

Vlastnost suprema množiny reálných čísel. Každá shora omezená množina má v množině reálných čísel supremum.

Touto vlastností se liší množina reálných od množiny racionálních čísel, jak ukáže následující příklad.

Příklad. Množina $M_1 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$ je rovna intervalu $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ a má supremum $\sup(M_1) = \sqrt{2}$.

Množina $M_2 = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ je rovna $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$ a v množině racionálních čísel nemá supremum. V množině reálných čísel má supremum $\sup(M_2) = \sqrt{2}$, ale $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Věta o konvergenci rostoucí omezené posloupnosti. Nechť je posloupnost $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ rostoucí a shora omezená. Pak je tato posloupnost konvergentní a její limita je rovna supremu členů posloupnosti.

$$\lim a_n = \sup(\{a_n : n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0\})$$

Důkaz věty o konvergenci rostoucí omezené posloupnosti. Protože je posloupnost shora omezená má množina jejích členů

$$M = \{a_n : n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0\}$$

supremum, označme ho $a = \sup(M)$. Ukážeme, že a je limitou posloupnosti.

Z podmínky S1 plyne

$$(\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0)(a_n \leq a)$$

odtud plyne pro libovolné $\varepsilon > 0$ a všechny členy posloupnosti a_n

$$a_n < a + \varepsilon \tag{24}$$

Zbývá dokázat, že existuje N takové, že pro $n > N$ je

$$a_n > a - \varepsilon \tag{25}$$

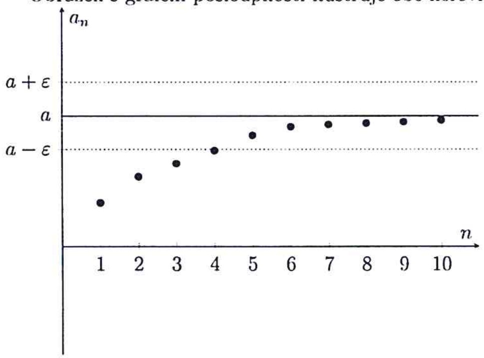
Z definice suprema plyne, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $x \in M$ takové, že $x > a - \varepsilon$. Množina M je tvořena členy posloupnosti, proto existuje index N, že $x = a_N$. Protože je posloupnost rostoucí, platí $a_n > a_N$ pro $n > N$, a tedy pro $n > N$ platí $a_n > a - \varepsilon$.

Z (24), (25) plyne pro $n > N$

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

a odtud $lim a_n = a$.

Obrázek s grafem posloupnosti ilustruje obě nerovnosti.



Věta o konvergenci klesající omezené posloupnosti. Nechť je posloupnost $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ klesající a shora omezená. Pak je tato posloupnost konvergentní a její limita je rovna

$$\lim a_n = -\sup(\{-a_n : n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0\})$$

Cvičení.

1. Rozmyslete si, že z $a_n < a_{n+1}$ plyne $-a_n > -a_{n+1}$ a tedy platí: Je-li posloupnost $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ rostoucí, pak je posloupnost $\{-a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ klesající.
2. Rozmyslete si: jsou-li D, H dolní a horní závora posloupnosti $\{a_n\}$, pak jsou $-H$, $-D$ závory posloupnosti $\{-a_n\}$

   $$-H \leq -a_n \leq -D$$

   a tedy platí: Je-li posloupnost $\{a_n\}$ omezená, pak je omezená i posloupnost $\{-a_n\}$.

VII

Důkaz věty o konvergenci klesající omezené posloupnosti. Je-li posloupnost $\{a_n\}$ omezená a klesající, pak je posloupnost opačných čísel $\{-a_n\}$ omezená a rostoucí. Z věty o limitě rostoucí omezené posloupnosti plyne existence $a \in \mathbb{R}$ splňujícího

$$\lim(-a_n) = \sup(\{-a_n : n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0\})$$

Z věty o aritmetice limit (VAL) plyne

$$\lim a_n = -\sup(\{-a_n : n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0\})$$

Definice vybrané posloupnosti. Nechť $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ je posloupnost. Nechť $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel a nechť $n_1 \geq n_0$.

Pak posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ nazýváme posloupností vybranou z posloupnosti $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$.

Příklad vybrané posloupnosti. Posloupnost

$$\left\{\frac{2}{k^2+1}\right\}_{k=1}^{\infty} = \left\{\frac{2}{2}, \frac{2}{5}, \frac{2}{10}, \frac{2}{17}, \frac{2}{26}, \dots\right\}$$

je vybranou posloupností z posloupnosti

$$\left\{\frac{2}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{6}, \frac{2}{7}, \frac{2}{8}, \frac{2}{9}, \frac{2}{10}, \dots\right\}$$

Posloupnost

$$\{1^k\}_{k=1}^{\infty} = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots\}$$

je vybranou posloupností z posloupnosti

$$\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots\}$$

VIII

Lemma o limitě vybrané posloupnosti. Nechť $\{a_n\}$ je konvergentní posloupnost a $\{a_{n_k}\}$ je poslopupnost z ní vybraná. Pak je vybraná posloupnost též konvergentní a má stejnou limitu, tj.

$$\lim a_n = \lim a_{n_k}$$

Důkaz lemmatu o limitě vybrané posloupnosti. Ke zvolenému $\varepsilon > 0$ je v posloupnosti konečně mnoho členů a_n, které nesplňují $|a_n - a| < \varepsilon$.

Odtud a z definice vybrané posloupnosti plyne, že $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ neplatí také jen pro konečně mnoho členů vybrané posloupnosti. Odtud plyne tvrzení lemmatu.

Příklad na použití lemmatu o vybrané posloupnosti. Z poslopunosti $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ lze volbou indexů $n_k = 2k+1$ vybrat posloupnost $\{(-1)^{2k+1}\}_{k=1}^{\infty}$, která má limitu

$$\lim(-1)^{2k+1} = -1$$

a volbou indexů $n_k = 2k$ vybrat posloupnost $\{(-1)^{2k}\}_{k=1}^{\infty}$, která má limitu

$$\lim(-1)^{2k} = 1$$

Odtud plyne, že posloupnost $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ nemá limitu. Kdyby měla limitu, musela by být zároveň rovna jedné i minus jedné, a to nneí možné (posloupnost má jej jednu limitu).

Věta o omezenosti konvergentní posloupnosti. Je-li posloupnost $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ konvergentní, pak je omezená.

Důkaz věty o omezenosti konvergentní posloupnosti. Potřebujeme najít dolní závoru D a horní závoru H splňující

$$(\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0)(D \leq a_n \leq H)$$

Předpokládáme, že poslopuunost $\{a_n\}$ je konvergentní, její limitu označme a a pak k $\varepsilon = 1$ existuje číslo $N \in \mathbb{Z}$ takové, že pro $n > N$ platí

$$a - 1 < a_n < a + 1$$

Indexů $n \leq N$ je konečně mnoho, proto existují

$$D_1 = \min\{a_{n_0}, a_{n_0+1}, \cdots, a_N\}, \qquad H_1 = \max\{a_{n_0}, a_{n_0+1}, \cdots, a_N\}, \tag{26}$$

Za dolní a horní hranici posloupnosti lze pak zvolit

$$D = \min\{a - 1, D_1\} \quad H = \min\{a + 1, H_1\}$$

Příklad omezené posloupnosti, která není konvergentní. Poslopunost $\{(-1)^n\}$ je omezená a není konvergentní.

Věta o vybrané konvergentní posloupnosti z omezené posloupnosti. Nechť $\{a_n\}$ je omezená posloupnost. Pak existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}$, která je konvergentní.

Důkaz věty o vybrané konvergentní posloupnosti z omezené posloupnosti nebudeme dělat.

Definice Cauchyovské posloupnosti. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ je Cauchyovská, pokud platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{R})(\forall n, m \in \mathbb{Z}, n > N, m > N)(|a_n - a_m| < \varepsilon)$$

Lemma o konvergentní a Cauchyovské posloupnosti. Je-li posloupnost $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ konvergentní, pak je i Cauchyovská.

Důkaz lemmatu o konvergentní a Cauchyovské posloupnosti. Zvolme $\varepsilon > 0$. Protože je posloupnost konvergentní, existuje N takové, že pro $n > N$, $m > N$ platí

$$|a_n - a| < \varepsilon/2, \quad |a_m - a| < \varepsilon/2.$$

Z trojúhelníkové nerovnosti pak plyne

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| < |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

a odtud plyne, že posloupnost je Cauchyovská.

Věta o konvergentní a Cauchyovské posloupnosti. Posloupnost $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ je konvergentní, právě když je Cauchyovská.

Důkaz věty o konvergentní a Cauchyovské posloupnosti. Máme dokázat dvě implikace:

1. Je-li posloupnost konvergentní, pak je Cauchyovská.
2. Je-li posloupnost Cauchyovská, pak je konvergentní.

První implikaci jsme dokázali v předchozím lemmatu. Důkaz druhé imlikace provedeme v krocích:

1. Ukážeme, že posloupnost je omezená (podrobnosti níže).
2. Použijeme větu o vybrané konvergentní posloupnosti z omezené posloupnosti, máme tedy posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ s limitou
$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a \tag{27}$$
3. Ukážeme, že
$$\lim a_n = a$$
Protože je posloupnost Cauchyovská, tak k $\varepsilon > 0$ existuje N, že pro $n, m \in \mathbb{Z}, n \geq N, m \geq N$ platí
$$|a_n - a_m| < \varepsilon/2 \tag{28}$$
Z (27) plyne, že existuje index $n_k > N$, pro který platí
$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon/2 \tag{29}$$
Z (28), (29) a trojúhelníkové nerovnosti plyne
$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Ještě zbývá dokázat bod 1 – že Cauchyovská posloupnost je omezená. Důkaz je analogický jako důkaz omezenosti konvergentní posloupnosti. K $\varepsilon = 1$ existuje $N \in \mathbb{Z}$ takové, že pro $n, m > N$ platí $|a_n - a_m| < 1$. Pro $m = N + 1$ dostaneme

$$a_{N+1} - 1 < a_n < a_{N+1} + 1$$

Pro členy na začátku posloupnosti zvolíme horní a dolní závoru D_1, H_1 stejně jako v (26). Čísla D, H jsou pak horní a dolní závorou pro členy celé posloupnosti

$$D = \min\{D_1, a_{N+1} - 1\}, \quad H = \max\{H_1, a_{N+1} + 1\}.$$