Předmluva

Text byl původně seznamem pojmů a obsahoval jen část Okolí bodu a spojitost funkce. Tuto část jsem neměnila, zůstává tedy pouhým přehledem. Připojila jsem k ní další části, které mají kromě přehledu i ambici některé pojmy a vztahy vysvětlovat. Přesto je text jen doplněk k přednášce a není zamýšlen jako samostatný učební text.

Okolí bodu a spojitost funkce

Okolí bodu $a \in \mathbb{R}$: (všechna ε jsou kladná čísla)
okolí $U_\varepsilon(a) \equiv (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ obsahuje čísla, která jsou na číselné ose od a vzdálená o méně než ε
pravé okolí $(a, a+\varepsilon)$ obsahuje čísla z okolí $U_\varepsilon(a)$, která jsou větší než a
levé okolí $(a-\varepsilon, a)$ obsahuje čísla z okolí $U_\varepsilon(a)$, která jsou menší než a

Poznámky k pojmu okolí:
1. Písmeno U označující okolí je z německého slova umgebung.
2. Více nás zajímají taková okolí, která obsahují jen jeho blízké body, tedy pro malé hodnoty ε (znázorněte si okolí na číselné ose).

Rozmyslete si:

1. $|x-2| < 3$ je ekvivalentní s $x \in (2-3, 2+3)$, po úpravě $x \in (-1, 5)$.
2. Obecněji $|x-a| < \delta$ je ekvivalentní s $x \in (a-\delta, a+\delta)$
3. Odtud plyne, že platí

$$x \in U_\varepsilon(a) \Longleftrightarrow |x-a| < \varepsilon$$

Definice spojitosti funkce v bodě.
Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$, pokud platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in U_\delta(a))(f(x) \in U_\varepsilon(f(a)))$$

Čteme: Pro každé epsilon kladné existuje delta kladné takové, že pro všechna x z delta okolí bodu a je $f(x)$ prvkem epsilon okolí bodu $f(a)$.

Pokud zaměníme delta okolí $U_\delta(a)$ za pravé okolí bodu a, dostaneme spojitost zprava. Podobně pro spojitost zleva.

Definice spojitosti funkce v bodě zprava.
Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$ zprava, pokud platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (a, a + \delta))(f(x) \in U_\varepsilon(f(a)))$$

Definice spojitosti funkce v bodě zleva.
Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$ zprava, pokud platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (a - \delta, a))(f(x) \in U_\varepsilon(f(a)))$$

Definice spojitosti funkce na intervalu.
Řekneme, že funkce f je spojitá na otevřeném intervalu (a, b), pokud je spojitá v každémm bodě $x \in (a, b)$.
Řekneme, že funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$, pokud je spojitá na intervalu (a, b), v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva.
Řekneme, že funkce f je spojitá na intervalu $(a, b]$, pokud je spojitá na intervalu (a, b) a v bodě b je spojitá zleva.
Řekneme, že funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b)$, pokud je spojitá na intervalu (a, b) a v bodě a je spojitá zprava.

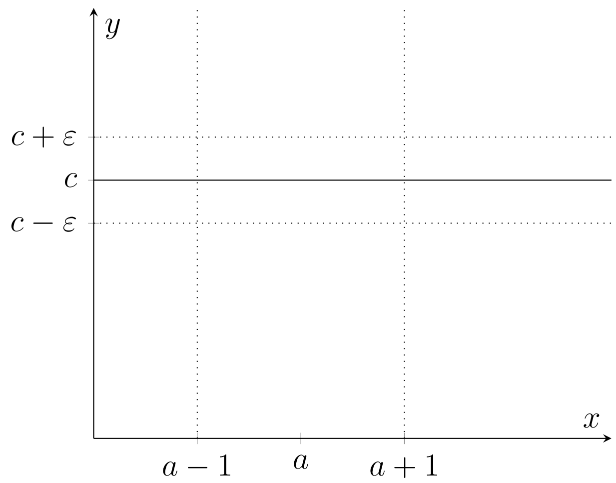
Příklady spojitých funkcí

Konstantní funkce je spojitá.

Pro funkci $f(x) = c$ platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(f(x) \in U_\varepsilon(f(a)))$$

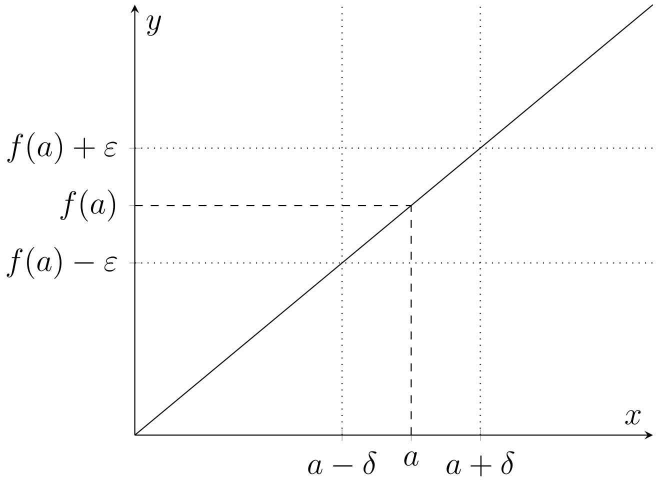
proto lze ke každému $\varepsilon > 0$ volit libovolné $\delta > 0$, například $\delta = 1$.



Identita je spojitá funkce.

Pro funkci $f(x) = x$ lze k $\varepsilon > 0$ volit $\delta = \varepsilon$, protože platí

$$(\forall x \in U_\varepsilon(a))(f(x) \in U_\varepsilon(f(a)))$$

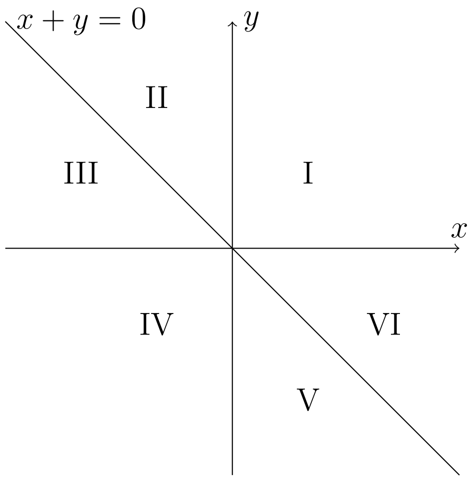


Mnohočleny jsou spojité funkce.

V dalším ukážeme, že sečtením a vynásobením spojitých funkcí dostaneme opět spojitou funkci. Protože každý mnohočlen lze získat těmito operacemi z konstantní a identické funkce, jsou mnohočleny spojité funkce.

Trojúhelníková nerovnost

Nazýváme tak nerovnost $|x+y| \leq |x| + |y|$, která platí pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. Její platnost dokážeme rozborem případů a odstraněním absolutní hodnoty. Souřadnou rovinu rozdělíme na šest částí.



Ukážeme platnost v částech I, III, další části necháme čtenáři jako cvičení.

I. Zde je $x \geq 0$, $y \geq 0$, proto je $|x| = x$, $|y| = y$, $|x + y| = x + y$ a tedy platí $|x + y| = |x| + |y|$.

III. Zde je $x \leq 0$, $y \geq 0$, $x+y \leq 0$ proto je $|x| = -x$, $|y| = y$, $|x+y| = -x-y$. Levá strana trojúhelníkové nerovnosti je tedy $L = |x + y| = -x - y$, pravá strana $P = |x| + |y| = -x + y$.

Protože je $y \geq 0$, je $y \geq -y$, tedy je $L \leq P$ a proto v části III trojúhelníková nerovnost platí.

Trojúhelníková nerovnost pro více sčítanců. Dvojím použitím trojúhelníkové nerovnosti dostaneme

$$|(x + y) + z| \leq |x + y| + |z| \leq |x| + |y| + |z|$$

Matematickou indukcí bychom dokázali platnost i pro větší počet sčítanců

$$|x_1 + x_2 + \cdots x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$

Věty o spojitosti

Tvrdíme: Nechť jsou fuhkce f, g spojité v bodě a. Pak jsou v bodě a spojité i funkce

$$\begin{aligned} f + g : \quad & y = f(x) + g(x) \\ fg : \quad & y = f(x)g(x) \end{aligned}$$

Hlavní myšlenka důkazu tvrzení: Spojitost funkce f v bodě a znamená, že v okolí bodu a se málo mění funkční hodnota. Malou změnu funkční hodnoty vyjádříme pomocí malého kladného čísla ε podmínkou

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Podobně pro funkci g

$$|g(x) - g(a)| < \varepsilon$$

Chceme ukázat, že tento rozdíl je malý i pro součet $f + g$, tedy, že je malé

$$|f(x) + g(x) - (f(a) + g(a))|$$

Úpravou a použitím trojúhelníkové nerovnosti dostaneme

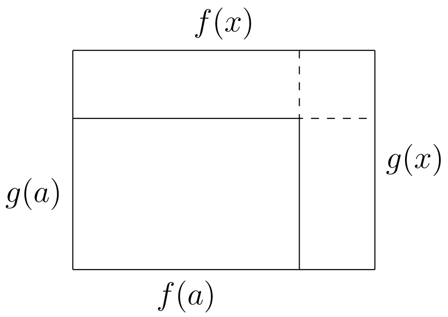
$$|f(x) + g(x) - (f(a) + g(a))| =$$
$$|f(x) - f(a) + g(x) - g(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| < 2\varepsilon$$

Tím jsme ukázali, že funkční hodnota funkce $f + g$ se v okolí bodu a mění málo (o méně než dvě epsilon).

Pro důkaz spojitosti součinu potřebujeme ukázat, že je malý výraz

$$|f(x)g(x) - f(a)g(a)| \tag{1}$$

K úpravě (1) použijeme obrázek



Z obrázku odvodíme následující rovnost. Její platnost ověřte úpravou pravé strany, protože obrázek nám slouží jen jako inspirace. Předpokládá, že $f(x) > f(a)$, $g(x) > g(a)$ a my chceme, aby tato rovnost platila i v ostatních případech.

$$f(x)g(x) - f(a)g(a) =$$
$$(f(x) - f(a))g(a) + (f(x) - f(a))(g(x) - g(a)) + f(a)(g(x) - g(a))$$

K další úpravě použijeme trojúhelníkovou nerovnost

$$|(f(x) - f(a))g(a) + (f(x) - f(a))(g(x) - g(a)) + f(a)(g(x) - g(a))| \leq$$
$$|(f(x) - f(a))g(a)| + |(f(x) - f(a))(g(x) - g(a))| + |f(a)(g(x) - g(a))|$$
$$< \varepsilon|g(a)| + \varepsilon^2 + \varepsilon|f(a)| = \varepsilon(|g(a)| + \varepsilon + |f(a)|)$$

Protože výraz $\varepsilon(|g(a)| + \varepsilon + |f(a)|)$ lze vhodnou volbou ε učinit libovolně malým kladným, je součin fg spojitá funkce v bodě a.

Celý důkaz tvrzení. Spojitost součtu: Zvolme $\varepsilon > 0$. K $\tilde{\varepsilon} \equiv \varepsilon/2$ existují $\delta_f > 0$, $\delta_g > 0$ taková, že je pro $x \in U_{\delta_f}$ je $|f(x) - f(a)| < \tilde{\varepsilon}$ a pro $x \in U_{\delta_g}$ je $|g(x) - g(a)| < \tilde{\varepsilon}$. Odtud pro $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$ platí

$$|f(x) + g(x) - f(a) - g(a)| < 2\tilde{\varepsilon} = \varepsilon,$$

a proto je funkce $f + g$ spojitá v bodě a.

Spojitost součinu: Zvolme $\varepsilon > 0$. K $\tilde{\varepsilon} \equiv \min\{\varepsilon/(|f(a)| + |g(a)| + 1), 1\}$ existují (stejně jako u součtu) $\delta_f > 0$, $\delta_g > 0$ taková, že je pro $x \in U_{\delta_f}$ je $|f(x) - f(a)| < \tilde{\varepsilon}$ a pro $x \in U_{\delta_g}$ je $|g(x) - g(a)| < \tilde{\varepsilon}$. Odtud pro $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$ platí

$$|f(x)g(x) - f(a)g(a)| < \\ \tilde{\varepsilon}(|f(a)| + |g(a)| + \tilde{\varepsilon}) \le \tilde{\varepsilon}(|f(a)| + |g(a)| + 1) = \varepsilon,$$

a proto je funkce fg spojitá v bodě a.

Věty o spojitých funkcích na uzavřeném intervalu

Tato část se připravuje.

Věta o kořeni spojité funkce.

Věta o nabývání mezihodnot.

Věta o obrazu intervalu a oboru hodnot funkce.

Věta o monotonii a spojitosti.

Věta o stejnoměrné spojitosti.