Čtvrtá série úloh ze středoškolské matematiky pro studenty FP TUL

Cíl: Zopakovat výroky, logiku, matematický symbolický jazyk (tj. zápis výroků a množin). Dalším cílem je zopakovat a procvičit neekvivalentní úpravy rovnic, poslední úloha propojuje tyto úpravy s matematickým symbolickým jazykem.

1a Pomocí tabulky pravdivostních hodnot zjistěte, zda je ekvivalentní výrok $(a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee b)$ s výrokem $(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$. (Symbol $\neg$ označuje negaci, tedy $\neg a$ značí negaci výroku a.)

1b Výrok: $(a \Rightarrow b) \Rightarrow c$ s výrokem $a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$.

1c Výrok $\neg(a \Rightarrow b)$ s výrokem $a \wedge \neg b$.

1d Výrok $(a \vee b) \wedge c$ s výrokem $(a \wedge c) \vee (b \wedge c)$.

2. Ukažte, že následující výroky jsou pravdivé pro jakékoliv pravdivostní ohodnocení výroků a, b, c

$$a \Rightarrow (b \Rightarrow a), \qquad (a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \Rightarrow ((a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c))$$

3. Zapište pomocí jednoho výroku (a, $\neg a$, 1 nebo 0) následující výroky: $a \vee 1$, $a \wedge 1$, $a \vee 0$, $a \wedge 0$, $a \vee a$, $a \vee \neg a$, $a \wedge a$, $a \wedge \neg a$. Symboly 1, popřípadě 0, označují pravdivý, popřípadě nepravdivý, výrok.[1]

4a Znegujte výroky a rozhodněte o jejich platnosti. Svůj závěr řádně zdůvodněte. Výroky i jejich negace napište slovy.

(a) $(\exists x \in \mathbb{R})(x - 4 > 0)$

(b) $(\forall x \in \mathbb{R})(\sin(x) \geq -1)$

4b (a) $(\exists x \in \mathbb{R})(\sin(x) > -1)$

(b) $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 \geq -1)$

4c (a) $(\exists x \in \mathbb{R})(x^3 + 1 < 0)$

(b) $(\forall x \in \mathbb{R})(x^4 + 1 > 0)$

[1] Návod: přemýšlejte o významu uvedených logických spojek a pokud si nevíte rady, použijte tabulku pravdivostních hodnot.

5a Na reálné ose vyznačte množiny A, B a množiny $A \cap B$, $A \cup B$

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x < 0\} \\ B &= \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\} \end{aligned}$$

5b

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : 2x^2 - x \leq 0\} \\ B &= \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 2\} \end{aligned}$$

5c

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : 2x^2 + 3x < 0\} \\ B &= \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 3\} \end{aligned}$$

6a Nalezněte všechna reálná čísla x splňující

$$2x + 3 = \sqrt{3x + 7}$$

6b

$$x - 3 = \sqrt{3x^2 + 1}$$

6c

$$-x - 1 = \sqrt{x + 7}$$

7a Určete množiny A, B a určete, které ze vztahů $A = B$, $A \subseteq B$, $B \subseteq A$ platí.

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : 2x + 3 = \sqrt{3x + 7}\} \\ B &= \{x \in \mathbb{R} : (2x + 3)^2 = 3x + 7\} \end{aligned}$$

7b

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : x - 3 = \sqrt{3x^2 + 1}\} \\ B &= \{x \in \mathbb{R} : (x - 3)^2 = 3x^2 + 1\} \end{aligned}$$

7c

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : -x - 1 = \sqrt{x + 7}\} \\ B &= \{x \in \mathbb{R} : (-x - 1)^2 = x + 7\} \end{aligned}$$