Taylorův polynom

Taylorův polynom funkce f v bodě a stupně n je polynom

$$T(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \\ + \frac{f^{IV}(a)}{4!}(x-a)^4 + \frac{f^{V}(a)}{5!}(x-a)^5 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Zde f', f'', f''', f^{IV}, f^{V} značí první, druhou až pátou derivaci funkce f.

Pomocí sumačního symbolu zapíšeme Taylorův polynom

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

zde $f^{(k)}(a)$ značí k-tou derivaci funkce f v bodě a, tedy například $f^{(1)} \equiv f'$, $f^{(2)} \equiv f''$, pro $k = 0$ je $f^{(0)}$ totéž co funkce f.
Pokud chceme zdůraznit funkci, bod a stupeň Taylorova polynomu, píšeme $T_{f,a,n}(x)$ místo $T(x)$.

Příklad. $f = x^3 - 4x^2 + 5x$, $a = 2$, $n = 6$
Všimneme si, že

$$T_n(x) = T_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

a budeme postupně počítat polynomy nultého, prvního, druhého až šestého stupně.

Nultý stupeň $n = 0$: $f(2) = 6$,

$$T_0(x) = 6$$

První stupeň: $f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$, $f'(2) = 1$,

$$T_1(x) = 6 + (x-2)$$

Druhý stupeň: $f''(x) = 6x - 8$, $f''(2) = 4$,’ $\frac{f''(2)}{2} = 2$,

$$T_2(x) = 6 + (x-2) + 2(x-2)^2$$

Třetí stupeň: $f'''(x) = 6$, $f'''(2) = 6$, $\frac{f'''(2)}{6} = 1$,

$$T_3(x) = 6 + (x-2) + 2(x-2)^2 + (x-2)^3$$

Čtvrtý a další stupně: protože pro $k \geq 4$ je $f^{(k)}(x) = 0$, dostáváme

$$T_6(x) = T_5(x) = T_4(x) = 6 + (x-2) + 2(x-2)^2 + (x-2)^3$$

Příklad. $f = \sqrt{x}$, $a = 1$, $n = 5$

$f(1) = 1$:

$$T_0(x) = 1$$

$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$, $f'(1) = \frac{1}{2}$:

$$T_1(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1)$$

$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$, $f''(1) = -\frac{1}{2}$, $\frac{f''(1)}{2} = -\frac{1}{4}$:

$$T_2(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2$$

$f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2}$, $f'''(1) = \frac{3}{8}$, $\frac{f'''(1)}{6} = \frac{1}{16}$:

$$T_3(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3$$

$f^{IV}(x) = -\frac{15}{16}x^{-7/2}$, $f^{IV}(1) = -\frac{15}{16}$, $\frac{f^{IV}(1)}{24} = -\frac{5}{128}$:

$$T_4(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 - \frac{5}{128}(x-1)^4$$

$f^{V}(x) = \frac{7\times 15}{32}x^{-9/2}$, $f^{IV}(1) = \frac{7\times 15}{32}$, $\frac{f^{IV}(1)}{5\times 24} = -\frac{7}{256}$:

$$T_5(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 - \frac{5}{128}(x-1)^4 + \frac{7}{256}(x-1)^5$$

Aproximační vlastnost Taylorova polynomu.
Hodnotu odmocniny čísla blízkého $a = 1$, například $\sqrt{1.2} \doteq 1.095445$ můžeme nahradit (aproximovat) hodnotou Taylorova polynomu.

Následující tabulka ilustruje, jak zvyšující stupeň polynomu tuto aproximaci zlepšuje

n	0	1	2	3	4	5
$T_n(1.2)$	1	1.1	1.09	1.095	1.0955	1.0954375

Aproximační vlastnost je také důvod, proč jsme Taylorův polynom uváděli bez roznásobených závorek.

Taylorův polynom a zobecněná binomická věta

Taylorův polynom pro funkci $f(x) = (1+x)^\alpha$ v bodě $a = 0$ je

$$T(x) = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}x^4+\cdots$$

Definujme zobecněný binomický koeficient pro $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$

Pak můžeme zapsat Taylorův polynom ve tvaru

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k$$

Všimněte si, že pro $\alpha = n$ dostáváme

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

zde je pravá strana podle binomické věty rovna

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} x^k$$

Později, až probereme součty nekonečně mnoha čísel a posléze i funkcí, uvedeme zobecněnou binomickou větu

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

a ukážeme, že pro $x \in (-1,1)$ má nekonečný součet smysl a uvedená rovnost platí.