

# Pracovní list: Vlastnosti funkcí a jejich grafické znázornění

Určeno pro studenty učitelství matematiky

(Text vznikl ve spolupráci s velkým jazykovým modelem Gemini 3.5 Thinking)

18. září 2026

## Cíle pracovního listu:

- **Odborný cíl:** Propojit početní řešení rovnic tvaru  $f(x) = y$  s parametrem  $y \in \mathbb{R}$  s grafickou interpretací (průsečíky grafu s horizontálními přímkami) pro odvození oboru hodnot  $H(f)$ , prostoty a existenci inverzní funkce. Upevnit formální definice vlastností funkcí (definiční obor, obor hodnot, prostota, monotonie, extrémy, omezenost) a přechod mezi formálním zápisem a grafem.
- **Didaktický cíl:** Rozvinout schopnost analyzovat žákovské miskoncepce (např. omezenost funkce vs. okraj kreslicí plochy), precizovat odborný matematický jazyk a graficky interpretovat formální logické výroky a jejich negace.

## 1 Cvičení 1: Inverzní funkce, rovnice a jejich grafická interpretace

### Část A: Kvadratická funkce

Uvažujte kvadratickou funkci  $f : y = x^2 - 4x + 3$ .

- Načrtněte graf funkce  $f$ . Vypočtěte a vyznačte vrchol paraboly a průsečíky s osami souřadnic.
- Pro konkrétní hodnotu  $y = 3$  řešte početně rovnici  $f(x) = 3$ . Řešení graficky znázorněte jako průsečíky grafu funkce  $f$  s přímkou  $y = 3$ .
- Uvažujte obecnou hodnotu  $y \in \mathbb{R}$ . Řešte početně rovnici  $f(x) = c$  s parametrem  $c \in \mathbb{R}$  a proveďte podrobnou diskusi počtu reálných kořenů v závislosti na hodnotě parametru  $c$ . Všechny případy graficky interpretněte pomocí polohy přímky  $y = c$  vůči grafu funkce.
- Na základě výsledků diskuse z bodu c) odpovězte na následující otázky a své závěry zdůvodněte:
  - Jaký je obor hodnot  $H(f)$  funkce  $f$ ?
  - Je funkce  $f$  prostá na celém svém definičním oboru  $D(f)$ ?
  - Existuje k funkci  $f$  na  $D(f)$  funkce inverzní? Pokud ne, jak je potřeba zúžit definiční obor  $D(f)$ , aby inverzní funkce existovala? Napište předpis pro tuto inverzní funkci pro vámi zvolené zúžení definičního oboru.

### Část B: Lineárně lomená funkce

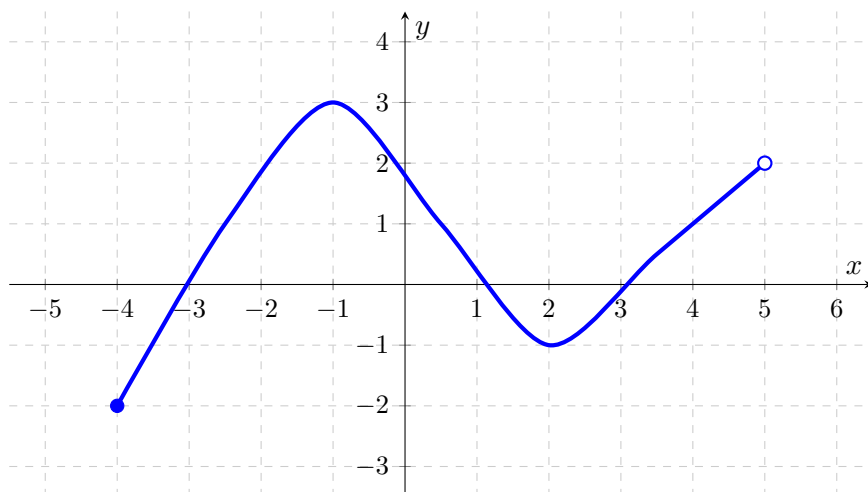
Uvažujte lineárně lomenou funkci  $g : y = \frac{2x+1}{x-1}$ .

- Určete  $D(g)$ , načrtněte graf funkce  $g$  a vyznačte v soustavě souřadnic její asymptoty a průsečíky s osami.
- Pro konkrétní hodnotu  $y = 5$  řešte početně rovnici  $g(x) = 5$ . Řešení graficky znázorněte jako průsečík grafu funkce  $g$  s přímkou  $y = 5$ .

- c) Uvažujte obecnou hodnotu  $y \in \mathbb{R}$ . Řešte početně rovnici  $g(x) = y$  s parametrem  $y$  a proveďte diskusi počtu kořenů v závislosti na hodnotě parametru  $y$ .
- d) Na základě diskuse určete obor hodnot  $H(g)$ , rozhodněte o prostotě funkce  $g$  na  $D(g)$  a napište předpis inverzní funkce  $g^{-1}$  včetně jejího definičního oboru  $D(g^{-1})$ .

## 2 Cvičení 2: Analýza vlastností z grafu funkce

Na obrázku níže je vyobrazen graf reálné funkce  $f$ . Všechny významné body leží v mřížkových bodech.



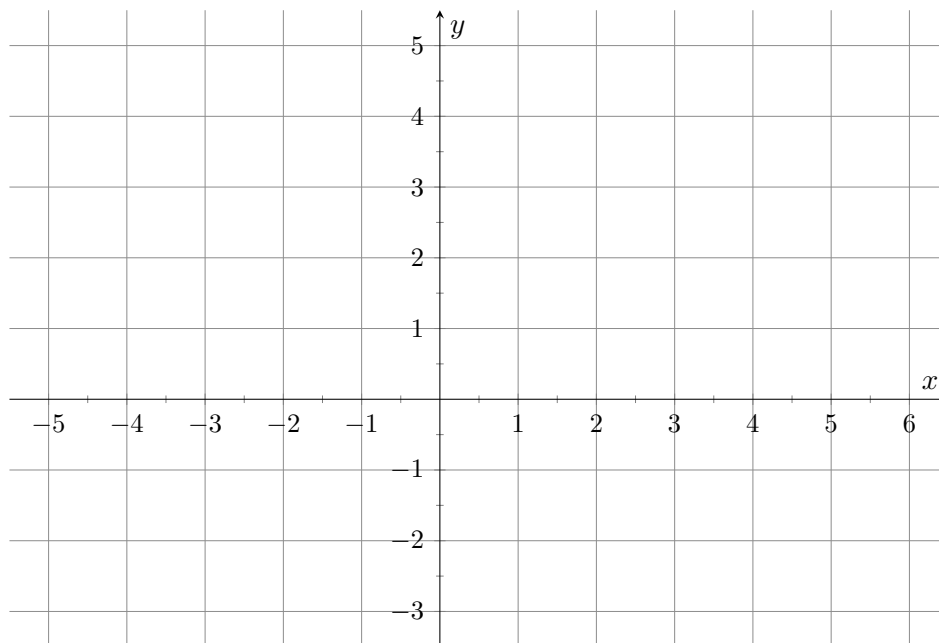
- a) **Definiční obor a obor hodnot:** Na základě formální definice definičního oboru a oboru hodnot určete množiny  $D(f)$  a  $H(f)$ . Zapište je jako intervaly.
- b) **Prostota:** Je funkce  $f$  prostá na svém definičním oboru  $D(f)$ ?
- Jakou vzájemnou polohu mají body grafu funkce v případě, že  $f(x_1) = f(x_2)$ ? Na základě této úvahy odpovězte ano/ne na otázku, zda je funkce prostá.
  - Uveďte konkrétní protipříklad (dva různé body  $x_1, x_2 \in D(f)$ ), který vyvrací podmínku z Definice prosté funkce. Při důkazu uvažujte obě definice (s implikací i obměněnou implikací).
- c) **Monotonie:**
- Najděte maximální<sup>1</sup> intervaly  $I \subseteq D(f)$ , na kterých je funkce  $f$  rostoucí.
  - Zjistěte, zda je funkce  $f$  rostoucí na množině, která je sjednocením intervalů, které jste našli v předchozím bodě.
- d) **Extrémy:**
- Určete všechny body  $x_0 \in D(f)$ , ve kterých má funkce lokální maximum. Pro jeden vybraný bod zvolte konkrétní  $\delta > 0$  a ukažte, že podmínka platí na celém  $O_\delta(x_0) \cap D(f)$ .
  - Má funkce na svém  $D(f)$  globální maximum? Pokud ano, určete jeho hodnotu a bod, ve kterém se nabývá.
- e) **Omezenost:**
- Je funkce  $f$  omezená zdola? Pokud ano, uveďte alespoň dva různé dolní odhady  $d \in \mathbb{R}$ .
  - Najděte nejmenší kladné reálné číslo  $K \in \mathbb{R}^+$  takové, že pro všechna  $x \in D(f)$  platí  $|f(x)| \leq K$ .

<sup>1</sup>Interval  $I$  nazveme maximální, pokud žádný interval  $J \supsetneq I$  nemá danou vlastnost.

### 3 Cvičení 3: Konstrukce grafu funkce podle požadavků na vlastnosti funkce

Načrtněte do připravené souřadnicové sítě graf jedné reálné funkce  $g$ , která současně splňuje všechny následující podmínky (využívejte uvedené definice):

- a)  $D(g) = (-4, 5]$ .
- b)  $H(g) = [-2, 4]$ .
- c) Funkce  $g$  je rostoucí na intervalu  $(-4, -1]$  a na intervalu  $[2, 5]$ .
- d) Funkce  $g$  má v bodě  $x_0 = -1$  lokální maximum, přičemž  $g(-1) = 3$ .
- e) Funkce  $g$  má v bodě  $x_1 = 2$  globální minimum.
- f) Funkce  $g$  není prostá na  $D(g)$ .
- g) Funkce  $g$  je omezená na  $D(g)$  s horní závorkou  $h = 4$ .



### 4 Cvičení 4: Didaktická reflexe (Pro budoucí učitele)

- a) **Práce s chybou:** Žák tvrdí: „Funkce je omezená shora, protože její graf nikde nepřesahuje horní okraj sešitu.“ Jak vysvětlíte žákovi rozdíl mezi formální definicí omezenosti funkce a fyzickým omezením kreslicí plochy?
- b) **Negace výroku:** Zformulujte pomocí kvantifikátorů negaci definice prosté funkce. Jak tuto negaci geometricky/graficky interpretujete žákům na střední škole?