

# Základní pojmy z matematické analýzy: Funkce a vlastnosti funkcí

**Definice 1** (Funkce). Reálnou funkcí jedné reálné proměnné (dále jen funkcí) rozumíme dvojici  $(D, f)$ , kde:

- $D \subseteq \mathbb{R}$  je neprázdná množina, kterou nazýváme **definiční obor** funkce.
- $f$  je pravidlo (předpis), které každému prvku  $x \in D$  přiřazuje **právě jedno** reálné číslo  $y \in \mathbb{R}$ .

Číslo  $y$  nazýváme **funkční hodnotou** v bodě  $x$  a značíme ho  $f(x)$ . Píšeme  $y = f(x)$ . Dále říkáme, že  $y$  je **obrazem** čísla  $x$  a  $x$  je **vzorem** čísla  $y$ .

**Poznámka:** Ačkoliv je funkce formálně definována jako dvojice  $(D, f)$ , v praxi často mluvíme zjednodušeně o „funkci  $f$ “. Definiční obor  $D$  je v takovém případě buď zřejmý z kontextu, nebo je jím myšlena maximální množina všech  $x \in \mathbb{R}$ , pro která má výraz  $f(x)$  smysl.

**Definice 2** (Obor hodnot). **Oborem hodnot** funkce  $f$  s definičním oborem  $D$  rozumíme množinu všech funkčních hodnot. Značíme ji  $H(f)$  nebo jen  $H$ .<sup>1</sup>

Formálně obor hodnot zapisujeme:

$$H = \{y \in \mathbb{R} \mid (\exists x \in D)(y = f(x))\}$$

Tento zápis čteme: „Obor hodnot  $H$  je množina všech reálných čísel  $y$ , pro která existuje  $x$  z definičního oboru  $D$  takové, že  $y = f(x)$ .“

Stručnější, ekvivalentní zápis je:

$$H = \{f(x) \mid x \in D\}$$

Tento zápis čteme: „Obor hodnot  $H$  je množina všech prvků tvaru  $f(x)$ , kde  $x$  probíhá celý definiční obor  $D$ .“

**Definice 3** (Graf funkce). **Grafem funkce**  $f$  s definičním oborem  $D$  rozumíme množinu všech uspořádaných dvojic  $[x, f(x)]$ , kde  $x \in D$ . Graf značíme  $G(f)$  nebo jen  $G$ .

Formální zápis:

$$G = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid (x \in D) \wedge (y = f(x))\}$$

---

<sup>1</sup>V anglické literatuře se používá název range a symbol  $R$ . Definiční obor se v anglické literatuře nazývá domain a symbol  $D$  je tedy stejný jako v češtině.

Tento zápis čteme: „Graf funkce je množina všech bodů  $[x, y]$  v rovině  $\mathbb{R}^2$  takových, že  $x$  patří do definičního oboru  $D$  a zároveň platí, že souřadnice  $y$  je rovna funkční hodnotě  $f(x)$ .“

**Poznámka:** Symbol logické spojky „a zároveň“ ( $\wedge$ ) se při zápisu množin často nahrazuje čárkou. Graf funkce tedy můžeme zapsat i jako:

$$G = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D, y = f(x)\}$$

**Definice 4** (Prostá funkce). Řekneme, že funkce  $f$  je **prostá** na svém definičním oboru  $D(f)$ , jestliže pro každé dva různé prvky  $x_1, x_2 \in D(f)$  jsou jejich obrazy také různé. Tedy platí implikace:

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

**Zápis pomocí kvantifikátorů:**

$$(\forall x_1, x_2 \in D(f))(x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2))$$

Tento formální výrok čteme: „Pro všechna  $x_1, x_2$  z definičního oboru funkce platí, že pokud je  $x_1$  různé od  $x_2$ , pak je  $f(x_1)$  různé od  $f(x_2)$ .“

**Poznámka (obměněná implikace):** Výše uvedená implikace je logicky ekvivalentní s její obměnou, která říká, že pokud jsou si rovny funkční hodnoty, musí si být rovny i jejich vzory. Tento tvar je v praxi často snazší ověřit.

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

Celou definici lze tedy ekvivalentně zapsat jako:

$$(\forall x_1, x_2 \in D(f))(f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2)$$

**Definice 5** (Rostoucí funkce). Nechť  $f$  je funkce a  $M$  je podmnožina jejího definičního oboru ( $M \subseteq D(f)$ ).

Řekneme, že funkce  $f$  je **rostoucí na množině**  $M$ , jestliže pro každé dva prvky  $x_1, x_2 \in M$  platí implikace:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

**Zápis pomocí kvantifikátorů:**

$$(\forall x_1, x_2 \in M)(x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2))$$

Tento formální výrok čteme: „Pro všechna  $x_1, x_2$  z množiny  $M$  platí, že pokud je  $x_1$  menší než  $x_2$ , pak je  $f(x_1)$  menší než  $f(x_2)$ .“

**Definice 6** (Maximum funkce na množině). Nechť  $f$  je funkce a  $M \subseteq D(f)$ .

Řekneme, že funkce  $f$  má v bodě  $x_0 \in M$  **maximum na množině**  $M$ , jestliže pro všechna  $x \in M$  platí nerovnost:

$$f(x) \leq f(x_0)$$

Hodnotu  $f(x_0)$  pak nazýváme maximem funkce  $f$  na množině  $M$ .

**Zápis pomocí kvantifikátorů** existence maxima:

$$(\exists x_0 \in M)(\forall x \in M)(f(x) \leq f(x_0))$$

Tento formální výrok čteme: „Existuje prvek  $x_0$  v množině  $M$  takový, že pro všechny prvky  $x$  z množiny  $M$  platí, že  $f(x)$  je menší nebo rovno  $f(x_0)$ .“

**Definice 7** (Okolí bodu). Nechť  $x_0 \in \mathbb{R}$  a  $\delta > 0$  je libovolné kladné reálné číslo.

$\delta$ -**okolím bodu**  $x_0$  rozumíme otevřený interval  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ . Značíme jej  $O_\delta(x_0)$  nebo jednodušeji  $O(x_0)$ , pokud konkrétní velikost  $\delta$  není podstatná.

Formální zápis:  $O(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ .

**Poznámka:** Vzdálenost bodů  $x, x_0$  na reálné ose je rovna hodnotě výrazu  $|x - x_0|$ . Okolí bodu lze tedy formálně zapsat:

$$O(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \delta\}$$

Tento zápis je pak možné (při znalosti geometrického významu absolutní hodnoty) přecházet: „ $O(x_0)$  je množina všech reálných čísel  $x$ , která mají od čísla  $x_0$  na reálné ose vzdálenost menší než  $\delta$ .“

**Definice 8** (Lokální maximum). Řekneme, že funkce  $f$  má v bodě  $x_0 \in D(f)$  **lokální maximum**, jestliže existuje okolí  $O(x_0)$  bodu  $x_0$  takové, že pro všechna  $x$  z průniku tohoto okolí a definičního oboru platí:

$$\forall x \in O(x_0) \cap D(f) : f(x) \leq f(x_0)$$

**Zápis pomocí kvantifikátorů:**

$$(\exists O(x_0))(\forall x \in O(x_0) \cap D(f))(f(x) \leq f(x_0))$$

Tento formální výrok čteme: „Existuje okolí  $O(x_0)$  bodu  $x_0$  takové, že pro všechna  $x$  patřící do tohoto okolí a zároveň do definičního oboru funkce platí, že  $f(x)$  je menší nebo rovno  $f(x_0)$ .“

**Definice 9** (Funkce omezená zdola). Nechť  $f$  je funkce a  $M \subseteq D(f)$ . Řekneme, že funkce

$f$  je **omezená zdola na množině**  $M$ , jestliže existuje reálné číslo  $d$  takové, že pro všechna  $x \in M$  platí nerovnost:

$$f(x) \geq d$$

Číslo  $d$  nazýváme **dolním odhadem** (nebo dolní **závorou**) funkce  $f$  na množině  $M$ .

**Zápis pomocí kvantifikátorů:**

$$(\exists d \in \mathbb{R})(\forall x \in M)(f(x) \geq d)$$

Tento formální výrok čteme: „Existuje reálné číslo  $d$  takové, že pro všechna  $x$  z množiny  $M$  platí, že funkční hodnota  $f(x)$  je větší nebo rovna  $d$ .“

**Definice 10** (Funkce omezená shora). Nechť  $f$  je funkce a  $M \subseteq D(f)$ . Řekneme, že funkce  $f$  je **omezená shora na množině**  $M$ , jestliže existuje reálné číslo  $h$  takové, že pro všechna  $x \in M$  platí nerovnost:

$$f(x) \leq h$$

Číslo  $h$  nazýváme **horním odhadem** (nebo horní závorou) funkce  $f$  na množině  $M$ .

**Zápis pomocí kvantifikátorů:**

$$(\exists h \in \mathbb{R})(\forall x \in M)(f(x) \leq h)$$

Tento formální výrok čteme: „Existuje reálné číslo  $h$  takové, že pro všechna  $x$  z množiny  $M$  platí, že funkční hodnota  $f(x)$  je menší nebo rovna  $h$ .“

**Definice 11** (Omezená funkce). Nechť  $f$  je funkce a  $M \subseteq D(f)$ . Řekneme, že funkce  $f$  je **omezená na množině**  $M$ , jestliže je na této množině omezená zdola i shora.

**Ekvivalentní definice:** Funkce  $f$  je omezená na množině  $M$ , jestliže existuje kladné reálné číslo  $K$  takové, že pro všechna  $x \in M$  platí:

$$|f(x)| \leq K$$

**Poznámka:** Tato nerovnost je ekvivalentní zápisu  $-K \leq f(x) \leq K$ . To znamená, že všechny funkční hodnoty na množině  $M$  leží v intervalu  $[-K, K]$ .

**Zápis pomocí kvantifikátorů:**

$$(\exists K \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in M)(|f(x)| \leq K)$$

Tento formální výrok čteme: „Existuje kladné reálné číslo  $K$  takové, že pro všechna  $x$  z množiny  $M$  je absolutní hodnota funkční hodnoty  $f(x)$  menší nebo rovna  $K$ .“

**Definice 12** (Kořen rovnice a kořen funkce). Nechť  $f$  je funkce s definičním oborem  $D(f)$  a nechť  $c \in \mathbb{R}$  je reálné číslo.

**Kořenem (řešením) rovnice**  $f(x) = c$  nazýváme každé číslo  $x_0 \in D(f)$ , pro které platí:

$$f(x_0) = c$$

**Kořenem (nulovým bodem) funkce**  $f$  nazýváme každé číslo  $x_0 \in D(f)$ , pro které platí:

$$f(x_0) = 0$$

**Zápis pomocí množin:** Množinu všech řešení rovnice  $f(x) = c$  značíme:

$$K_c = \{x \in D(f) \mid f(x) = c\}$$

**Poznámka (Geometrický význam):**

- Kořen funkce  $f$  je totéž co kořen rovnice  $f(x) = 0$ . V grafickém znázornění odpovídá  $x$ -ové souřadnici průsečíku grafu funkce  $f$  s osou  $x$  (přímkou  $y = 0$ ).
- Kořen rovnice  $f(x) = y$  (pro pevně zvolenou hodnotu  $y \in \mathbb{R}$ ) odpovídá  $x$ -ové souřadnici průsečíku grafu funkce  $f$  s přímkou rovnoběžnou s osou  $x$ , která osu  $y$  protíná v hodnotě  $y$  (přímkou o rovnici  $y = \text{konst.}$ ).