

První série úloh ze středoškolské matematiky pro studenty FP TUL

Cíl: procvičit grafy kvadratických, lineárně lomených a lineárních funkcí a především procvičit čtení informací z grafů.

- 1a Řešte nerovnici a k řešení použijte náčrtek grafu funkce f . Náčrtek stačí jen natolik přesný, aby vám pomohl vyřešit nerovnici.

$$(x - 1)(x + 3) > 0 \quad f(x) = (x - 1)(x + 3)$$

Vzorové řešení

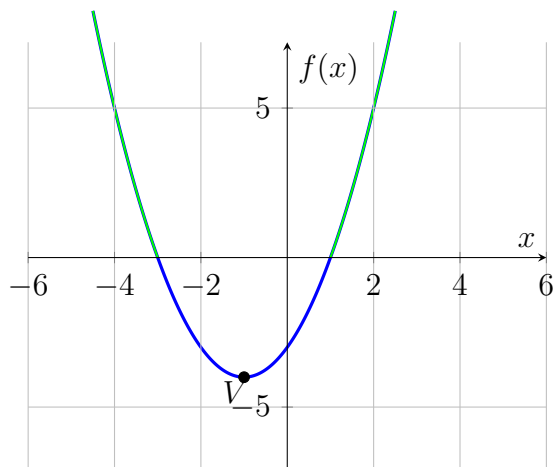
Nulové body funkce - řešíme rovnici:

$$(x - 1)(x + 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = -3$$

Vrchol paraboly určíme upravením "na čtverec":

$$f(x) = x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4 \Rightarrow V = [-1, -4]$$

Náčrtek grafu funkce:



Řešení nerovnice: Z grafu vidíme, že funkce je kladná mimo interval mezi nulovými body:

$$x \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$$

1b

$$2 - x - x^2 \leq 0 \quad f(x) = 2 - x - x^2$$

1c

$$2 - x + x^2 < 0 \quad f(x) = 2 - x + x^2$$

1d

$$8 - 2x + x^2 \geq 0 \quad f(x) = 8 - 2x + x^2$$

1e

$$8 + 3x - x^2 > 0 \quad f(x) = 8 + 3x - x^2$$

2a Nakreslete grafy funkcí f , g do jedné kartézské soustavy. Spočítejte jejich průsečíky a označte je na grafu. Dále vyřešte nerovnici.¹

$$f(x) = x^2 \quad g(x) = x + 2 \quad x^2 < x + 2$$

Vzorové řešení

Průsečíky funkcí - hledáme řešení rovnice:

$$x^2 = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

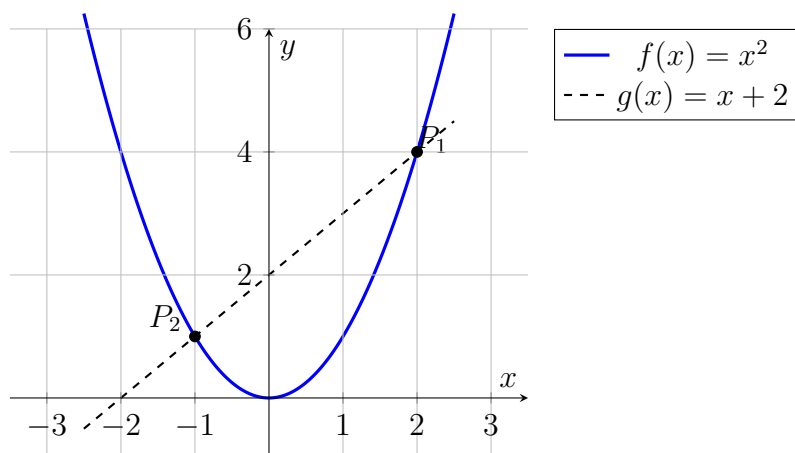
Rozložíme na závorky:

$$(x - 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 2, \quad x_2 = -1$$

$$y_1 = g(2) = 4, \quad y_2 = g(-1) = 1$$

$$P_1 = [2; 4], \quad P_2 = [-1; 1]$$

Grafy funkcí:



¹Doporučujeme určit její řešení z grafu.

Řešení nerovnice - hledáme, kdy platí:

$$x^2 < x + 2$$

Z grafu vidíme, že parabola $f(x) = x^2$ leží pod přímkou $g(x) = x + 2$ právě mezi průsečíky:

$$\boxed{x \in (-1, 2)}$$

2b

$$f(x) = x^2 \quad g(x) = 2x + 3 \quad x^2 \leq 2x + 3$$

2c

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad g(x) = 4x - 2 \quad \frac{1}{x} > 4x - 2$$

2d

$$f(x) = \frac{2}{3-x} \quad g(x) = 2 \quad \frac{2}{3-x} \geq 2$$

2e

$$f(x) = \frac{4}{x+1} \quad g(x) = 2x \quad \frac{4}{x+1} \geq 2x$$

3a Načrtněte graf funkce f a vypočtěte funkci inverzní k f .

$$f : y = \frac{1 - 2x}{x + 4}$$

Vzorové řešení

1) Inverzní funkce - zaměníme $x \leftrightarrow y$ a vyjádříme y :

$$x = \frac{1 - 2y}{y + 4}$$

$$x(y + 4) = 1 - 2y \Rightarrow xy + 4x = 1 - 2y$$

$$xy + 2y = 1 - 4x \Rightarrow y(x + 2) = 1 - 4x$$

$$y = \frac{1 - 4x}{x + 2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1 - 4x}{x + 2}$$

2) Náčrt grafu

Zjistíme střed lomené funkce $f(x)$ pomocí dělení mnohočlenu:

$$f(x) = \frac{1 - 2x}{x + 4} = \frac{-2x + 1}{x + 4}$$

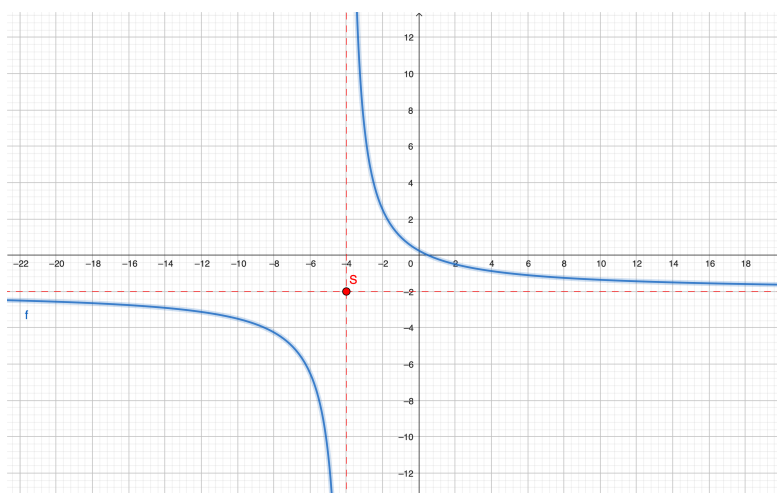
Tedy:

$$f(x) = -2 + \frac{9}{x + 4}$$

Z toho vyplývá:

- Svislá asymptota: $x = -4$
- Vodorovná asymptota: $y = -2$
- Střed rovinné souměrnosti: $S = [-4; -2]$

Graf funkce:



Obrázek 1: graf

3b

$$f : y = \frac{6x + 2}{2x - 1}$$

3c

$$f : y = \frac{4x - 5}{2x + 3}$$

- 4a Řešte rovnici s neznámou x a parametrem y . Pro jaké $y \in \mathbb{R}$ má rovnice řešení? Jak tato y určíte z grafu funkce f ?

$$y = \frac{1 - 2x}{x + 4}$$

Vzorové řešení

- 1) Vyjádření x z rovnice - zjistíme, pro jaké hodnoty y je rovnice řešitelná:

$$y = \frac{1 - 2x}{x + 4}$$

$$y(x + 4) = 1 - 2x$$

$$yx + 4y = 1 - 2x$$

$$yx + 2x = 1 - 4y$$

$$x(y + 2) = 1 - 4y$$

Nyní budeme rovnici dělit výrazem $y + 2$ a to je možné pouze pro $y \neq -2$

$$x = \frac{1 - 4y}{y + 2}$$

Rovnice má řešení pro všechna $y \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Pro $y = -2$ má rovnice tvar

$$0 \cdot x = 9$$

a nemá tedy řešení.

- 2) Z grafu funkce (viz obr. 1)

$$f(x) = \frac{1 - 2x}{x + 4}$$

poznáme, že hodnota $y = -2$ nepatří do oboru hodnot funkce – v tomto bodě rovnice nemá řešení. V grafu je to vodorovná asymptota, ke které se graf blíží, ale nikdy jí nedosáhne.

4b

$$y = \frac{6x + 2}{2x - 1}$$

4c

$$y = \frac{4x - 5}{2x + 3}$$

5a Načrtněte graf funkce f a z grafu určete, pro které hodnoty $a \in \mathbb{R}$ má rovnice $f(x) = a$ alespoň jeden kořen a pro které má právě jeden kořen.

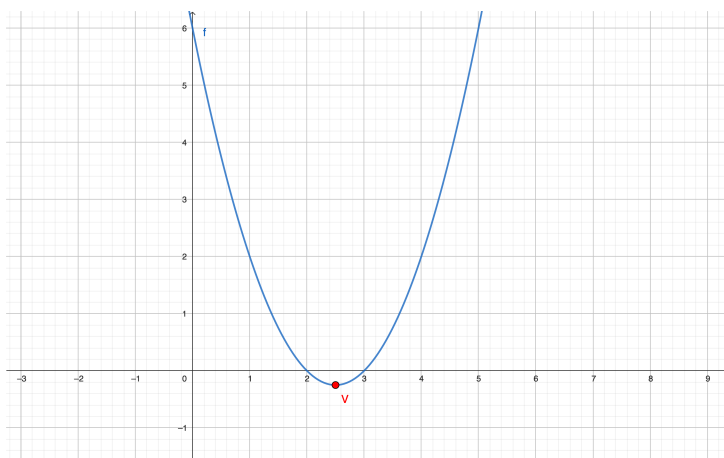
$$f(x) = x^2 - 5x + 6$$

Vzorové řešení

Vrchol paraboly určíme upravením "na čtverec":

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2,5)^2 - 0,25$$

$$V = [2,5; -0,25]$$



Obrázek 2: graf

- Rovnice má **právě jeden kořen**, pokud přímka $y = a$ je tečnou k parabole, tedy:

$$a = -0,25$$

- Rovnice má **alespoň jeden kořen**, pokud přímka leží nad nebo na vrcholu paraboly, tedy:

$$a \geq -0,25$$

5b

$$f(x) = -x^2 + 3x + 4$$

5c

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

5d

$$f(x) = -x^2 + 3x$$