Opakování číselných posloupností.
Posloupnost s_n konverguje k s právě když se $|s_n - s|$ s rostoucím n blíží k nule.
Nepořádné zdůvodnění:
konvergence posloupnosti znamená, že s rostoucím indexem n se hodnoty jejích členů přibližují k hodnotě limity. Hodnota $|s_n - s|$ měří, jak moc se hodnoty čísel s_n a s liší.
Pořádné zdůvodnění:
Věta o limitě rozdílu dává: $\lim s_n = s$ právě když $\lim(s_n - s) = 0$. Požadovaný výsledek nám dá věta, která říká

$$\lim a_n = 0 \Leftrightarrow \lim |a_n| = 0. \tag{1}$$

Pozor na to, že pro jiná čísla na pravých stranách platí v (1) jen jedna implikace. Která? Uvažte posloupnost $a_n = (-1)^n$.

Stejnoměrná konvergence řad funkcí.
Budeme zkoumat stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci řady

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots =: \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x). \tag{2}$$

Víme, že součet řady (jeho existenci i hodnotu) definujeme pomocí limity částečných součtů

$$s_n(x) := \sum_{k=1}^{n} f_k(x). \tag{3}$$

Z výše uvedeného opakování víme, že posloupnost částečných součtů $s_n(x)$ konverguje k $s(x)$ právě když se hodnota $|s_n(x) - s(x)|$ blíží k nule. Stejnoměrná konvergence na množině (intervalu) I znamená, nepořádně řečeno, že v tomto blížení se žádné $x \in I$ nezaostává.
Jediné kritérium, které jste měli na přednášce, je kritérium o majorantní řadě: podaří-li se nám najít konstanty $M_k \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall x \in I : |f_k(x)| \leq M_k$ a že řada $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ konverguje, pak víme, že funkční řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konverguje stejnoměrně na I.
Jak jste toto kritérium použili na přednášce na řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{1+k^2x^2}$?
Všimli jste si, že pro $x > 0$ platí

$$\frac{x}{1 + k^2x^2} < \frac{x}{k^2x^2} = \frac{1}{k^2x}.$$

Pak jste si uvědomili, že číselná řada s členy $\frac{1}{k^2}$ konverguje a zajásali. Než budeme jásat úplně, musíme se vypořádat s x ve jmenovateli. Pro konstantu $c \in \mathbb{R}$ řada se členy $\frac{1}{ck^2}$ také konverguje a toho můžeme využít. Uvědomíme si, že pro $x \leq\geq c$ – menší? větší? doplňte správnou možnost – platí

$$\frac{1}{xk^2} \leq \frac{1}{ck^2}$$

a máme rázem stejnoměrnou konvergenci na intervalu $\langle c, \infty)$ pro $c > 0$ a tedy lokálně stejnoměrnou konverenci na $(0, \infty)$.

Teď ještě těžší část – ukážeme, že na intervalu $(0, \infty)$ naše řada konverguje pouze lokálně stejnoměrně a nikoliv stejnoměrně.
Pro lepší pochopení toho, co se na přednášce dělo, najděte maximum funkcí $f_k(x) = \frac{x}{1+k^2x^2}$ na $(0, \infty)$. Vyjde vám hodnota $\frac{1}{2k}$ (nabývá se v bodě $x = \frac{1}{k}$). Víme, že řada s členy $\frac{1}{2k}$ diverguje, ale to ještě nestačí, žádné takové kritérium využívající divergenci řady se členy $f_k(x_k)$ pro šikovně zvolená x_k nemáme. Vzpomeneme si, jak jsme dokazovali divergenci harmonické řady a zkusíme to stejně. Odhadneme zdola součet

$$f_k(\tfrac{1}{k}) + f_{k+1}(\tfrac{1}{k}) + f_{k+2}(\tfrac{1}{k}) + \cdots + f_{2k}(\tfrac{1}{k}). \tag{4}$$

To je součet k čísel, z nichž nejmenší je ten poslední. Proto je

$$f_k(\tfrac{1}{k}) + f_{k+1}(\tfrac{1}{k}) + \cdots + f_{2k}(\tfrac{1}{k}) > k\frac{1/k}{1 + 2k^2/k^2} = \frac{1}{5}. \tag{5}$$

A teď už záleží jen na tom, jestli známe a umíme použít Bolzano-Cauchyho podmínku. Ta říká, že (konečný) součet

$$f_n(x_0) + f_{n+1}(x_0) + \cdots + f_m(x_0) \tag{6}$$

se pro stejnoměně konvergující řadu musí blížit k nule, a to nezávisle na zvolené hodnotě $x_0 \in I$ a pro n, m dostatečně velké.

Jak souvisí opakování na začátku s kritériem o majorizující řadě.
Vyjádříme $|s_n(x) - s(x)|$ jako limitu

$$|s_n(x) - s(x)| = \lim_{m\to\infty} |s_n(x) - s_{n+m}(x)|$$

(Použili jsme definici $s(x) = \lim_{m\to\infty} s_{m+n}(x)$, větu o limitě rozdílu a tu správnou (tj. platnou) implikaci z (1)).
Na úpravu výrazu

$$|s_{m+n}(x) - s_n(x)| = |\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)|$$

použijeme vztah, který se nazývá trojúhelníková nerovnost (proč se tak nazývá se dozvíte v příštím semestru)

$$|a + b| \leq |a| + |b|. \tag{7}$$

Dokažte (7) – rozeberte jednotlivě případy pro kladná a nekladná a a b. Opakovaným použitím trojúhelníkové nerovnosti dostaneme

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)|.$$

Odtud je už nedaleko k důkazu kritéria o majorizující řadě.