Šestá semestrální práce z AN2E

Svůj postup vhodně komentujte a zdůvodněte.

1. Určete střed a poloměr konvergence řad a sečtěte je

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}n^2x^n.$$

(3 body)

2. Najděte příklad posloupnosti funkcí $\{f_k\}$, která na intervalu $(0,+\infty)$ bodově konverguje k 0, ale přitom nekonverguje stejnoměrně. (2 body)

3. Najděte příklad jako v 2 pro interval (0,1). (2 body)

4. Umíte zvolit příklady ad 2, 3 tak, aby funkce f_k byly nekonečně-krát diferencovatelné? (2 body)

5. Umíte zvolit příklady ad 2 a 3 tak, aby funkce f_k nebyly spojité? (2 body)

6. Zachová se spojitost "limitní funkce" $f = \lim f_k$ při bodové, stejnoměrné, lokálně stejnoměrné konvergenci f_k? (2 body)

7. Pokud f_k konverguje k 0 stejnoměrně na každém intervalu $[c,d] \subset (0,1)$, konverguje již f_k stejnoměrně? Změní se výsledek, pokud zaměníme $(0,1)$ za $[0,1]$? (2 body)

8. Najděte posloupnost spojitých funkcí f_k tak, aby bodově konvergovala na $[0,1]$ k nespojité funkci f! (2 body)

9. Umíte pomocí stejnoměrné konvergence sestrojit rostoucí funkci na $[0,1]$ tak, aby byla nespojitá ve všech racionálních bodech intervalu $[0,1]$? Taková funkce bude mít obě jednostranné limity ve všech racionálních bodech intervalu $[0,1]$, ale ty budou různé. (2 body)

10. Pro následující funkce určete bodovou limitu $\lim f_k$ včetně intervalu, na němž bodová limita existuje (a využijte je jako inspiraci pro předchozí příklad).

    (a)

    $$f_k = \frac{\sqrt{k}x}{1+kx^2}$$

    (1 bod)

    (b)

    $$f_k = kx^k(1-x)$$

    (1 bod)

    (c)

    $$f_k = x^k(1-x)$$

    (1 bod)

(d)

$$f_k = \sin^k x$$

(1 bod)

(e)

$$f_k = \frac{\lfloor kx \rfloor}{k}$$

Závorky $\lfloor, \rfloor$ označují zaokrouhlování na nejbližší nižší celé číslo. (1 bod)

(f)

$$f_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n2^n}$$

(1 bod)