První série úloh z předmětů AN2E a KA2

Literatura: Veselý, Jiří: Základy matematické analýzy.
K příkladům: Posloupnost a její limita: 2.1.1, 2.1.6–7, 2.2.1, 2.2.9–10, vybraná posloupnost a neexistence limity: 2.4.3, 2.4.13–14, Cauchyovská posloupnost: 2.4.6–8, lineární algebra: poznámka 1.6.10, text za poznámkou 2.1.20 a za důsledkem 2.1.25, řady: 2.1.12, 2.1.17, operace s nekonečny: 2.3.4, okolí bodů: 2.1.4, 4.3.1.
Další: Celý odstavec 2.1.1 – 2.1.17, 2.1.19 – 2.1.25, 2.1.30, 2.1.31, bez důkazů vět o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu, důkaz věty o limitě omezené monotonní posloupnosti jen obrázkem. Odstavec 2.2: 2.2.1 – 2.2.3, 2.2.8-2.2.12, přitom důkaz 2.2.12 stačí jen obrázkem. Odstavec 2.3: 2.3.1 – 2.3.6, ale bez důkazu věty 2.3.5. Odstavec 2.4: 2.4.3 – 2.4.9, 2.4.13, 2.4.14, přitom důkaz věty 2.4.4 jen obrázkem – jak zvolíme počáteční interval, že z intervalu vybereme první člen posloupnosti a pak opakujeme: interval rozpůlíme, vybereme jednu půlku (podel jakého kritéria?) a z půlky vybereme další člen posloupnosti.

Body: 20/14/7
Všechny své výsledky řádně zdůvodněte.

1. Zjistěte, které z následujících výroků jsou pravdivé a ty nepravdivé znegujte. Pravdivost výroků (i těch negací) zdůvodněte (tvrdí-li například výrok, že něco existuje, tak to něco nalezněte). Zdůvodňovat můžete slovně, nemusíte používat matematické symboly.
   Úmluva: množina přirozených čísel $\mathbb{N}$ neobsahuje nulu.
$$
\begin{aligned}
&(\forall n \in \mathbb{N}) \left[\tfrac{1}{n} \in (-0.4, 0.4)\right] \\
&(\forall n \in \mathbb{N}) \left[n > 2 \Rightarrow \tfrac{1}{n} \in (-0.4, 0.4)\right] \\
&(\forall n \in \mathbb{N}) \left[n > 2 \Rightarrow \tfrac{1}{n} \in (-0.04, 0.04)\right] \\
&(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \left[n > k \Rightarrow \tfrac{1}{n} \in (-0.04, 0.04)\right] \\
&(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \left[n > k \Rightarrow \tfrac{1}{n} \in (0.1, 2)\right] \\
&(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N}) \left[n > k \Rightarrow \tfrac{1}{n} \in (0.1, 2)\right]
\end{aligned}
$$

2. Ukažte (pomocí definice limity), že posloupnost $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ má limitu rovnu nule.

3. Ukažte (pomocí definice limity), že pro $q \in (-1, 1)$ má posloupnost s n-tým členem $a_n = q^n$ limitu rovnu nule.

4. Jakou limitu má posloupnost z příkladu 3 pro $q = 1$ a pro $q > 1$? Zdůvodněte (s užitím definice limity).

5. Ukažte, že pro $q \le -1$ nemá posloupnost z příkladu 3 limitu.

6. Které z následujících posloupností jsou Cauchyovské?

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}, \quad \{\sqrt{n}\}, \quad \{(-1)^n\}, \quad \left\{\frac{n}{n^2+1}\right\}, \quad \left\{\frac{\sin n}{n}\right\}, \quad \left\{\frac{n^3}{n^2+1}\right\}.$$

7. Z kterých vět o limitách posloupností plyne

   (a) množina konvergentních posloupností tvoří podprostor množiny všech posloupností (reálných čísel),

   (b) zobrazení, které konvergentní posloupnosti přiřadí její limitu, je lineární.

   Návod: napište definici příslušných pojmů lineární algebry a přepište vztahy v ní obsažené pro výše uvedený případ.

8. Pro následující součty vypište první tři a poslední tři členy (ve tvaru prvního příkladu)

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right), \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k}, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{(-k)^3}{2^k}$$

9. Součty v příkladu 8 jsou n-tými členy posloupností (nazýváme je posloupnostmi částečných součtů). Určete, které z těchto posloupností jsou monotonní a určete druh monotonie (tedy, jestli je posloupnost rostoucí, nerostoucí, klesající, neklesající či konstantní).

10. Které operace s nekonečnem jsou definované a jakou mají hodnotu?

$$\frac{0}{+\infty}, \ \frac{-\infty}{0}, \ (-2)(-\infty), \ -\infty-(-\infty), \ +\infty-(-\infty), \ \frac{1+\infty}{-2}, \ \frac{-\infty}{+\infty}, \ 0\infty$$

11. Pro následující dvojice bodů napište dvojici disjunktních okolí.
    Poznámka: disjunktní znamená, že nemají společný bod.

$$1, +\infty, \quad +\infty, -\infty, \quad 2, -3, \quad -\infty, 6$$

12. Napište dvojici disjunktních okolí pro dvojici různých čísel z $\mathbb{R}^*$. Zvlášť řešte případy čísel z $\mathbb{R}$, $+\infty$ a $-\infty$.