Druhá série úloh z předmětů AN2E a KA2

Literatura: Veselý, Jiří: Základy matematické analýzy.
K příkladům: Desetinný a dvojkový rozvoj: 1.4.30, 3.2.6, „teleskopické řady“ 3.1.7, 3.2.31, 3.2.32, divergence harmonické řady: v úvodu na začátku článku o nekonečných součtech, 3.1.9, vztah (3.3) v poznámce 3.1.10, konvergence řad: 3.1.1, 3.1.2, 3.1.14, 3.1.15, 3.2.3, 3.2.16 a limitní verze v 3.2.26, 3.2.25, 3.3.1, součet geometrické řady: 3.1.4, neopatrné manipulace s řadami: věta o limitě rozdílu pro případ nevlastních limit, odstavec 3.4.
Další: 3.1.1 – 3.1.7, 3.1.13 – 3.1.16, 3.2.1 – 3.2.6, článek 3.3, 3.4.1, 3.4.2, 3.4.5, 3.4.6, 3.4.7.

Body: 12/8/4
Všechny své výsledky řádně zdůvodněte.

1. Napište prvních 10 cifer desetinného (dekadického) a dvojkového (binárního) rozvoje zlomku $\frac{6}{7}$. Určete horní odhad chyby, které se dopustíme, když číslo nahradíme jeho konečným desetinným a dvojkovým rozvojem o deseti cifrách.
   Návod: dvojkový rozvoj počítejte obdobně jako desetinný; horní odhad získáte sečtením řad $\sum_k \frac{9}{10^k}$, $\sum_k \frac{1}{2^k}$ začínajících vhodnou hodnotou indexu k.

2. Určete součet následujících „teleskopických“ řad.
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+3}\right),\ \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right),\ \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{k+2}{k+1}-\frac{k+1}{k}\right).$$
   Návod: Napište si několik prvních a několik posledních členů částečného součtu.

3. Určete, které z následujících řad konvergují, které konvergují absolutně.
$$\sum_{k=1}^{+\infty} k,\quad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k},\quad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k},\quad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2},\quad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^3},\quad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{k}},$$
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right),\quad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2+2k},\quad \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k},\quad \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{2^k},\quad \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^3}{2^k}.$$

4. Určete součet alespoň pěti řad z příkladu 3. Včetně nekonečných součtů.

5. Jsou všechny následující úpravy a úvahy správné? Nebo je některá chybná? Která?

   (a) Uvažujme řadu
   $$s_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots$$
   a vydělme ji člen po členu dvěma
   $$\frac{s_1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \frac{1}{16} + \cdots .$$
   Vidíme, že stejnou řadu dostaneme z původní vynecháním členů na lichých pozicích. Odtud plyne
   $$\frac{s_1}{2} = s_1 - \frac{s_1}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \cdots .$$
   A odtud
   $$0 = \frac{s_1}{2} - \frac{s_1}{2} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \cdots ,$$
   a tedy součet kladných čísel je roven nule.

   (b) Uvažujme řadu
   $$s_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$
   Její členy vydělíme dvěma a proložíme je nulami
   $$\frac{s_2}{2} = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} + \cdots .$$
   Obě řady člen po členu sečteme
   $$\frac{3s_2}{2} = s_2 + \frac{s_2}{2} = 1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots .$$
   Dostali jsme stejnou řadu jako na začátku, jen se zpřeházenými členy. Proto platí $s_2 = \frac{3s_2}{2}$.

   (c) Uvažujme geometrickou řadu
   $$s_3 = 1 + \frac{8}{7} + \frac{64}{49} + \frac{8^3}{7^3} + \frac{8^4}{7^4} + \cdots$$
   a vynásobme ji číslem $\frac{8}{7}$
   $$\frac{8s_3}{7} = \frac{8}{7} + \frac{64}{49} + \frac{8^3}{7^3} + \frac{8^4}{7^4} + \frac{8^5}{7^5} \cdots .$$
   Vidíme, že platí $s_3 = 1 + \frac{8s_3}{7}$, odkud dostaneme $s_3 = -7$.