Třetí série úloh z předmětů AN2E a KA2

Literatura:
[JV] Veselý, Jiří: Základy matematické analýzy, 8.1 – 8.3, zvláště 8.1.4, 8.3.5, 8.3.6, 8.3.11, 8.3.12.
[IK2] Černý, Ilja: Inteligentní kalkulus 2, lemma 13.1, věty 13.9, 13.10.

Body: 15/10/5
Všechny své výsledky řádně zdůvodněte.

1. Ukažte, že pro $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí

   (a)
   $$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$
   Návod: absolutní hodnota komplexního čísla $z = x + \imath y$ je definována $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$; dosaďte $z_1 = x_1 + \imath y_1$, $z_2 = x_2 + \imath y_2$ postupně do kvadrátů obou stran a upravte do stejného tvaru. Na závěr zdůvodněte, proč z rovnosti kvadrátů pravé a levé strany plyne rovnost pravé a levé strany.

   (b)
   $$z_2 \neq 0: \quad |z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$$
   Návod: buď postupujte obdobně jako v případě součinu nebo si upravování můžete zjednodušit tím, že ukážete platnost $1/|z| = |1/z|$ a použijete 1a na součin z_1 a $1/z_2$.

   (c)
   $$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$
   Návod: dosaďte za z_1, z_2 a upravujte nerovnici do tvaru, jehož platnost je očividná (kvadrát je větší nebo roven nule) a zdůvodněte, že vámi provedené úpravy jsou ekvivalentní.

2. Napište několik prvních členů následujících mocninných řad a pro každou z nich vyznačte v Gaussově (komplexní) rovině části, o kterých umíte rozhodnout, zda na nich řady konvergují. Popište na které z vámi vyznačených částí řada konverguje a na které nekonverguje.
   $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$
   $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} z^k}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2^k}.$$
   Návod: použijte limitní podílové kritérium. Pro body $z \in \mathbb{C}$, pro které vám toto kritérium na otázku neodpoví, použijte jiná kritéria – rozhodněte o konvergenci alespoň pro $z \in \mathbb{R}$.

3. Určete poloměr konvergence a střed mocninných řad z 2.

4. Určete součet alespoň šesti řad z příkladu 2 pro $z \in \mathbb{R}$.
   Návod: jedna z řad je geometrická a dalších pět jsou MacLaurinovy řady funkcí sin, cos, exponenciální a logaritmické. K ukázání, že součet MacLaurinovy řady funkce f v bodě x je roven $f(x)$ použijte větu o zbytku Taylorova polynomu.

5. Zjistěte, zda jsou následující výroky pravdivé a ty nepravdivé znegujte. Pravdivost výroků (i těch negací) zdůvodněte.

$$(\forall q \in (0,1))(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\,[(n > k) \Rightarrow (q^n \in (-\varepsilon, \varepsilon))]$$
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall q \in (0,1))(\forall n \in \mathbb{N})\,[(n > k) \Rightarrow (q^n \in (-\varepsilon, \varepsilon))]$$

   Návod: rozmyslete si, že $q^n \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ lze ekvivalentně zapsat jako dvě nerovnosti, přitom jedna nerovnost je splněna a druhou můžete ekvivalentně upravit buď na tvar $n > \ldots$ nebo na tvar $q < \ldots$. Také doporučuji nakreslit si graf. Pomoci může jak graf funkce $x \mapsto x^n$, tak posloupnosti $n \mapsto x^n$.

6. Zdůvodněte, že řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \tag{1}$$

   (a) Konverguje pro $x \in \langle -1, 1)$.
   (b) Konverguje absolutně pro $x \in (-1, 1)$.

   Dále zdůvodněte, že funkce f, která $x \in (-1,1)$ přiřazuje součet řady (1) má derivaci f' rovnu součtu řady vzniklé z (1) derivací člen po členu, tedy, že $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$. Na závěr odtud vypočtěte $f(x)$ pro $x \in (-1, 1)$.

   Návod: použijte [JV] 8.3.11.

7. Použijte vzorec pro součet nekonečné geometrické řady na odvození MacLaurinova polynomu funkce

$$f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}.$$

   Proč dává toto odvození správný výsledek?

   Návod: použijte [JV] 8.3.12.