Čtvrtá série úloh z předmětů AN2E a KA2

Literatura:
[JV] Veselý, Jiří: Základy matematické analýzy.
[IK1] Černý, Ilja: Inteligentní kalkulus.

Body: 15/10/5
Všechny své výsledky řádně zdůvodněte.

1. Následující mnohočleny rozložte na součin v $\mathbb{R}$ nerozložitelných mnohočlenů

   (a)
   $$x^4 - 81, \quad x^3 + 3x^2 - 3x - 1, \quad x^6 - 1, \quad x^4 + 18x^2,$$
   $$x^4 + 18x^2 + 81, \quad x^4 + 18x^2 + 80,$$

   (bonus)
   $$x^4 + 81, \quad x^8 - 1, \quad x^6 + 1.$$

2. Následující výrazy rozložte na součet polynomu a parciálních zlomků
   $$\frac{x^6}{x^4 - 1}, \quad \frac{x^6}{x^6 - 1}, \quad \frac{1}{x^2(x^2 + x + 1)^2}.$$

   Literatura: [JV] 9.3.5, 9.3.9, 9.3.12; [IK1] 9.7, 9.7a-c.

3. Sečtěte řady
   $$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+4)}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k-1}{k(k+1)(k+2)}.$$

   Návod: rozložením racionální funkce na součet parciálních zlomků dostanete teleskopické řady.

4. Ukažte, že funkce
   $$f_1 : x \mapsto 2x + \sqrt{4x^2 + x + 9}, \quad f_2 : x \mapsto -2x + \sqrt{4x^2 + x + 9},$$

   jsou monotonní na svém definičním oboru (který je roven $\mathbb{R}$). Dále nalezněte funkce k nim inverzní (předpis i definiční obor) a vypočtěte derivaci obou funkcí a funkcí k nim inverzních.

   Návod: při hledání inverzní funkce řešíte rovnici $f(x) = t$ s neznámou

x a parametrem t. Rozmyslete si, jak byste postupovali při řešení rovnice s konkrétní číselnou hodnotou t a postupujte obdobně. Vyjde vám jeden kořen, proto inverzní funkce existuje. Dejte pozor na to, že jste při řešení rovnice umocňovali, proto nemůžete z výsledku mechanicky určit definiční obor inverzní funkce. Tento definiční obor můžete získat například výpočtem limit funkce f v obou nevlastních bodech.

5. Pro $f_3 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{4x^2+x+9}}$ a funkce f_1, f_2 z předchozího příkladu vyjádřete výrazy $f_3(f_1^{-1}(t))$, $f_3(f_2^{-1}(t))$ jako racionální funkce proměnné t.

   Návod: $x = f_1^{-1}(t)$ je ekvivalentní s $t = f_1(x)$ a to je totéž jako $t = 2x + \sqrt{4x^2+x+9}$, tedy platí $f_3(x) = \frac{1}{t-2x}$ a tedy $f_3(f_1^{-1}(t)) = \frac{1}{t-2f_1^{-1}(t)}$.

6. Pro funkci f proveďte totéž jako v příkladu 4 s tím rozdílem, že navíc určíte definiční obor funkce f.

$$f : x \mapsto \sqrt{\frac{5-x}{x+2}}.$$

   Dále do $\sqrt{(5-x)(x+2)}$ dosaďte $x = f^{-1}(t)$ a výsledek upravte do tvaru racionální funkce.

   Návod: uvědomte si, že platí $\sqrt{(5-x)(x+2)} = |x+2|\sqrt{\frac{5-x}{x+2}}$.

7. Totéž jako v příkladu 4 pro funkce

$$g_1 : x \mapsto \operatorname{tg}\tfrac{x}{2}, \quad x \in (-\pi, \pi), \qquad g_2 : x \mapsto \operatorname{tg} x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

   Dále vyjádřete $\sin x$ a $\cos x$ jako racionální funkce proměnné $t = g_1(x)$ a $\sin^2 x$, $\sin x \cos x$ a $\cos^2 x$ jako racionální funkce proměnné $t = g_2(x)$.

   Návod: jedno z možných odvození pro g_1 najdete v [JV] 9.3.19, jiné dostanete ze vztahů $\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1+\cos x}{1-\cos x}$, $|\sin x| = \sqrt{1-\cos^2 x}$. Pro g_2 použijte vztah $\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$.