Úpravy po prvním zveřejnění:
V příkladu 4 vloženo slovo číselné.
V příkladu 21 změněno u slova tvrzení jednotné číslo na množné.

Šestá série úloh z předmětů AN2E a KA2

Všechny své výsledky řádně zdůvodněte.
V některých příkladech požaduji zformulovat tvrzení. Bude se mně více líbit, když je zformulujete svými slovy. Buďte pečliví při uvedení předpokladů a při odlišení, co předpokládáte a co tvrdíte.

1. Ukažte (pomocí definice limity), že pro $q \in (-1, 1\rangle$ má posloupnost s n-tým členem $a_n = q^n$ vlastní limitu.

2. Určete, které z následujících posloupností jsou Cauchyovské. Zformulujte tvrzení, které používáte.

$$\left\{\frac{n^2-2}{n^2+3n}\right\}, \quad \left\{\frac{n^3-2}{n^2+3n}\right\}, \quad \left\{2^{-n}\right\}, \quad \left\{3^{n-\sqrt{n^3+1}}\right\}, \left\{3^{-n+\sqrt{n^3+1}}\right\}.$$

3. O každé z následujících řad rozhodněte, zda konvergují a zda konvergují absolutně. Dále o každé rozhodněte, zda má monotonní posloupnost částečných součtů.

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{k^2+1}}{k^3+1}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^3+1}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{3^k}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k}{3^k}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k^3\,2^k}{3^k}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k\sqrt{k}}.$$

4. Pro každou níže uvedenou vlastnost uveďte příklad číselné řady s nezápornými členy, nebo zformulujte tvrzení, ze kterého plyne, že taková řada neexistuje. Dále zformulujte srovnávací kritérium pro řady s nezápornými členy.

   (a) Řada konverguje.
   (b) Řada nekonverguje.
   (c) Řada má součet.
   (d) Řada nemá součet.

5. Sečtěte řady

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k, \quad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{3}{k^2+3k}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{k^2+3k}+\left(\frac{2}{3}\right)^k\right).$$

6. Určete pro která $x \in \mathbb{R}$ konverguje následující řada. Zformulujte větu o derivování mocninné řady člen po členu a vypočtěte hodnotu páté derivace součtu této řady v nule.
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+3}{3k+1}\, x^k.$$

7. Určete pro která $x \in \mathbb{R}$ konverguje následující řada. Dále vyjádřete funkci f' jako součet řady a zformulujte tvrzení, které k výpočtu použijete.
$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\, x^k.$$

8. Vyjádřete následující výrazy jako součet mocninné řady a pro každou řadu určete poloměr konvergence. Dále vypočtěte hodnotu třetí derivace funkce V_3 v bodě 0 a zformulujte tvrzení, které k výpočtu použijete.
$$V_1(x) = \frac{1}{1-2x}, \quad V_2(x) = \frac{1}{1-x}, \quad V_3(x) = \frac{1}{(1-x)(1-2x)}.$$

9. Vyjádřete výrazy $V(x) = \frac{1}{1-2x}$, $V'(x)$ jako součty mocninných řad. Zformulujte tvrzení, která používáte.

10. Odvoďte vzorce pro součet konečné a nekonečné geometrické řady.

11. Uvažujme mocninnou řadu $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$, předpokládejme, že má kladný poloměr konvergence a označme $s(x)$ její součet v bodě x. Musí se uvažovaná řada rovnat McLaurinově řadě funkce s? Pokud je vaše odpověď ne, uveďte příklad. Pokud je ano, zformulujte tvrzení, jehož je váš závěr důsledkem.

12. Uvažujme funkci f, předpokládejme, že má v bodě nula derivace všech řádů a její McLaurinova řada má kladný poloměr konvergence. Musí být součet McLaurinovy řady (uvnitř kruhu konvergence) roven funkci f? Pokud je vaše odpověď ne, uveďte příklad. Pokud je ano, zformulujte tvrzení, jehož je váš závěr důsledkem.

13. Napište McLaurinovu řadu funkce $f : x \mapsto e^{2x}$ – rozepište několik prvních členů, vypočtěte koeficient a_k u k-té mocniny a určete její poloměr konvergence.

14. Vypočtěte integrály

$$\int_0^{14\pi/3} \frac{\sin x}{\sin^2 x + 3}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{14\pi/3} \frac{1}{\sin^2 x + 3}\,\mathrm{d}x.$$

15. Pro funkce $f_1 : x \mapsto x^2$, $f_2 : x \mapsto \sqrt{x}$ vypočtěte integrály

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (f_i'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

16. Vypočtěte integrály

$$\int_0^2 x\sqrt{x^2 - 9}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^2 \sqrt{x^2 - 9}\,\mathrm{d}x.$$

17. Vypočtěte integrály

$$\int_1^2 \frac{x}{1 + \sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x.$$

18. Vypočtěte integrály

$$I_1 = \int_0^2 \sin^5 x\,\mathrm{d}x, \qquad I_2 = \int_0^2 \sin^6 x\,\mathrm{d}x.$$

19. Vypočtěte integrály

$$I_1 = \int_0^1 x^3 e^{2x}\,\mathrm{d}x, \qquad I_2(\alpha) = \int_0^1 e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x, \alpha \in \mathbb{R}.$$

20. Načrtněte obrazce a vypočtěte jejich plochy. Dále vypočtěte objem těles, která vzniknou rotací obrazců kolem osy x.

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1 &= \{[x,y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y \geq 0 \wedge y \leq 2 - x - x^2\}, \\ \mathcal{O}_2 &= \{[x,y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y \geq 2 - x \wedge y \leq 3 - x - x^2\}. \end{aligned}$$

21. Vypočtěte $f'(1)$ a zformulujte tvrzení, která k výpočtu použijete.

$$f(x) = (\mathcal{R}) \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$