Požadavky ke zkoušce z AN2E

Pro studenty FP TUL
Martina Šimůnková
15. června 2015

Posloupnosti.

Definice posloupnosti a značení, definice limity, jednoznačnost limity: 2.1.1 – 2.1.10.

Monotonní posloupnost a limita: 2.1.11 – 2.1.12, 2.1.19 – 2.1.20. Důkaz 2.1.19 stačí obrázkem – načrtnete graf monotonní posloupnosti, do grafu vhodně vyznačíte její limitu a příslušná okolí z definice limity.

Věta 2.3.2 o limitě a nerovnostech. (Význam slova skoro je vysvětlen v poznámce 2.1.8, bod 2.) Důkaz stačí obrázkem – načrtnete grafy příslušných posloupností, vhodně vyznačíte jejich limity a příslušná okolí.

Cauchyovská posloupnost: 2.4.6 – 2.4.8.
Hlavní rozdíl v definici konvergentní a Cauchyovské posloupnosti: jedna obsahuje limitu, druhá nikoliv.
Důkaz 2.4.7 celý, z 2.4.8 jen hlavní myšlenky: je-li posloupnost konvergentní, je omezená; je-li omezená, má vybranou konvergentní posloupnost; a trojúhelníková nerovnost ze závěru důkazu.

Věty o limitách součtu, rozdílu, součinu a podílu pro konečné (tj. vlastní) i nekonečné (tj. nevlastní) limity – pouze tvrzení, bez důkazu.

Nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem bez důkazu – 1.3.28.
Monotonie a omezenost posloupnosti $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ (3.2.7) a číslo e jako její limita.

Číselné řady.

Nebezpečí při operacích s nekonečnými součty: 3.1.12, příklad ze semestrální práce.

Definice řady, součtu řady, konvergentní řady, nutná podmínka konvergence: 3.1.1 – 3.1.3.

Geometrická řada: 3.1.4. Součet konečné (tj. s konečně mnoha členy) geometrické řady – jedno odvození je v 1.11, my jsme si ukazovali jiné. Důkaz, že pro $q \in (-1, 1)$ jsme dělali za použití logaritmů (v [JV] je důkaz jiný, protože k zavedení logaritmů používá limit a chce se vyhnout definici kruhem).

Množina konvergentních řad tvoří vektorový prostor. Přiřazení limity konvergentní řadě je lineární zobrazení: lemma 3.1.13.

Absolutní konvergence řad: 3.1.14 – 3.1.16. Věta 3.1.15 i s důkazem.

Řady s kladnými členy:
Srovnávací kritérium: 3.2.2, i s důkazem. 3.2.3. Základní znalost: posloupnost částečných součtů řady s kladnými členy je . . . , a proto má limitu. Jde tedy jen o to určit, zda má konečnou limitu.
Podílové kritérium a jeho limitní verze: 3.2.16 a 3.2.26. I s důkazem: nelimitní verze je založená na srovnání s geometrickou řadou, u limitního potřebujete navíc použít definici limity posloupnosti.
Limitní srovnávací kritérium: 3.2.25. A ještě něco navíc: je-li A z 2.3.25 nula, platí ze dvou nerovností $Ka_n \le b_n$, $b_n \le La_n$ jen ta první (proč?) a tedy z konvergence řady s členy b_n plyne konvergence řady s členy a_n. Je-li $A = +\infty$, je to naopak.
Integrální kritérium i s důkazem pomocí obrázku – grafu.

Desetinné rozvoje a geometrické řady a srovnávací kritérium: 3.2.6.

Přerovnání řad: 3.4.4 – 3.4.7, poslední i s důkazem – alespoň hlavní myšlenku: je-li řada neabsolutně konvergentní, máme dle 3.4.4 k dispozici kladná čísla, jejichž součet je $+\infty$

a záporná čísla, jejichž součet je $-\infty$. Postupně vytváříme řadu následovně: přidáváme kladná čísla, dokud částečný součet nepřesáhne s, pak přidáváme záporná čísla, dokud částečný součet neklesne pod s a znovu kladná, dokud ...

Komplexní čísla. 8.1.1 – 8.1.5.

Minimum o funkci komplexní proměnné.

Okolí bodu v komplexní rovině, limita, derivace: 8.2.1 – 8.2.2.

Mocninné řady.

Poloměr konvergence, kruh konvergence, derivování mocninné řady člen po členu: 8.3.1 – 8.3.14.

Lemma 8.3.4 i s důkazem (hlavní myšlenky: pokud řada v bodě ζ konverguje, tvoří její členy omezenou posloupnost a absolutní konvergenci v bodě, který je ke středu konvergence blíž než bod ζ, ukážeme srovnáním s konvergentní geometrickou řadou).

Důkaz lemmatu 8.3.9 za dodatečného předpokladu existence limity podílu $\frac{a_k}{a_{k+1}}$. Ukážeme, že oba poloměry konvergence jsou rovny této limitě.

Z důkazu věty 8.3.10 jen hlavní myšlenku: máme ukázat, že pro z blízké w je rozdíl $\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w)$ „malý“ a to ukážeme úpravou rozdílu na součet rozdílů (úpravu vysvětlete) $\left(\frac{s_n(z)-s_n(w)}{z-w} - s'_n(w)\right) + (s'_n(w) - g(w)) + \left(\frac{R_n(z)-R_n(w)}{z-w}\right)$ a ukázáním, že každý sčítanec je „malý“. Bude stačit, když „malost“ sčítanců zdůvodníte slovně ve stylu, když je n velké, tak je toto malé, protože ... (uvedete význam členů), případně: když je z blízké w, tak ....

Primitivní funkce.

Primitivní funkce, její vztah k ploše pod křivkou: 9.1.1 – 9.1.6.

Lemma 9.1.2 i s důkazem, u lemmatu 9.1.4 jen hlavní myšlenka - úpravy za použití vlastností O1 – O3.

U věty 9.1.6 chci, abyste věděli, že je důsledkem existence Riemannova integrálu pro spojité funkce.

Metoda per partes a jak se odvodí z pravidla o derivování součinu.

Věty o substisuci. Chci, abyste věděli, že jsou dvě, že jedna převádí integrál z $f(x)$ na integrál z $f(g(t))g'(t)$ a druhá naopak, že u té první potřebujete ke g inverzní funkci a jak substituce souvisí s pravidlem o derivování složené funkce.

Lineární substituce: $t = ax + b$. (Zkušený student ji dělá zpaměti.)

Eulerovvy substituce: $t = \sqrt{a}x + \sqrt{ax^2 + bx + c}$ a $t = \sqrt{\frac{x-a}{x-b}}$, $t = \sqrt{\frac{a-x}{x-b}}$.

Goniometrické substituce: $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $t = \operatorname{tg} x$, $t = \sin x$, $t = \cos x$ a za jakých podmínek je použít.

Kdy použít substituci $t = e^x$ a kdy $t = \ln x$.

Kdy použít substituci $t = \sqrt{ax + b}$.

Určité integrály.

Zobecněná primitivní funkce, Newtonův integrál.

Riemannův integrál, vlastnosti.

Stejnoměrná konvergence. Definice, vysvětlení rozdílu bodové a stejnoměrné konvergence obrázkem. Při stejnoměrné konvergenci se zachovává spojitost a lze počítat limitu za integračním znamením. Příklad posloupnosti funkcí, pro kterou není možné prohodit limitu a integraci. Na přednášce jsme si ukazovali: $f_n(x) = \begin{cases} n^2 - nx & x \in \langle 0, \frac{1}{n} \rangle \\ 0 & x \in (\frac{1}{n}, 1 \rangle \end{cases}$.

Požadavky ke zkoušce z KA2 jsou stejné, navíc všechny důkazy, 3.2.8 – 3.2.11, definici kompaktní množiny, vlastnost o vybraném konečném otevřeném podpokrytí a stejnoměrnou spojitost.