První semestrální práce z předmětu AN2E

Podstatná součást všech úkolů je přiměřeně podrobný popis, jak jste k výsledkům došli.

1. Pro studenty, kteří měli zkoušku z AN1E za 3, případně se na ni chystají: vyberte si termín, kterého jste se nezúčastnili a vypracujte písemnou práci. body: 10/6/4

2. Pro každou z funkcí f_i řešte rovnici $f_i(x) = y$ s neznámou $x \in \mathbb{R}$ a parametrem $y \in \mathbb{R}$ (samozřejmou součástí řešení je uvedení počtu řešení v závislosti na hodnotě y). Vysvětlete, jak z těchto výsledků určíte obor hodnot funkce f_i a zda je f_i prostá a tento obor hodnot a tuto vlastnost určete.
   Poznámka: ve všech semestrálních pracích značí log přirozený logaritmus.
   $f_1 : x \mapsto \frac{2+\log x}{1-\log x}$
   $f_2 : x \mapsto \log \frac{2+x}{1-x}$
   $f_3 : x \mapsto \log (2x - x^2)$
   $f_4 : x \mapsto 2\log x - (\log x)^2$
   $f_5 : x \mapsto 2^{x+1} - 4^x$
   $f_6 : x \mapsto \log (2^{x+1} - 4^x)$
   $f_7 : x \mapsto x + \sqrt{1 + x^2}$ body: 14/10/7

Nápověda – stručné řešení příkladu pro $f : x \mapsto \log \frac{1-x}{2-x}$:
Rovnici $y = \log \frac{1-x}{2-x}$ řešíme substitucí $y = \log t$, $t = \frac{1-x}{2-x}$.
První rovnice: pro $y \in \mathbb{R}$ jedno řešení $t = \exp y$.
Druhá rovnice: pro $t = 1$ rovnice nemá řešení, pro $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ má jedno řešení $x = \frac{1-2t}{1-t}$.
Rovnice $y = f(x)$: pro $y \in \mathbb{R}$ má rovnice tolik řešení, kolik má řešení *druhá* rovnice pro $t = \exp y$; tedy pro $y = 0$ rovnice nemá řešení a pro $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ má rovnice jedno řešení $x = \frac{1-2\log y}{1-\log y}$.

Obor hodnot H funkce f je množina všech funkčních hodnot $f(x)$, kde x je prvkem definičního oboru D funkce f;
Formálně zapsáno $H = \{f(x) : x \in D\}$.
Jinak zformulováno: je to množina všech $y \in \mathbb{R}$, pro něž existuje $x \in D$ takové, že $y = f(x)$;
Formálně zapsáno $H = \{y \in \mathbb{R} : (\exists x \in D)(y = f(x))\}$.

Obor hodnot funkce f je tedy množina všech $y \in \mathbb{R}$, takových, že má rovnice $y = f(x)$ alespoň jedno řešení, tedy $H = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Rovnice $y = f(x)$ má nejvýše jedno řešení pro každé $y \in \mathbb{R}$, a proto je funkce f prostá.

Stručné řešení dalšího příkladu: rovnici $y = \log(x^2 - 6x)$ řešíme substitucí $t = x^2 - 6x$.
Rovnice $y = \log t$: pro $y \in \mathbb{R}$ jedno řešení $t = \exp y$.
Rovnice $t = x^2 - 6x$: pro $t > -9$ má rovnice dvě řešení $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{t+9}$, pro $t = -9$ má jedno řešení $x = 3$ a pro $t < -9$ rovnice nemá řešení.
Jak určíme počet řešení rovnice $y = \log(x^2 - 6x)$: pro $y \in \mathbb{R}$ si rozepíšeme řešení t_i a ke každému t_i řešení x_{ij}. V našem případě ke každému $y \in \mathbb{R}$ máme jedno $t = \exp y$ a k tomuto t máme nula až dvě řešení x. Nyní je potřeba zjistit, kterým $y \in \mathbb{R}$ odpovídá $t >=< -9$. To zjistíme řešením nerovnic $\exp y >=< -9$ (grafickým nebo početním).
Výsledek: pro $y \in \mathbb{R}$ má rovnice dvě řešení $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{\exp y + 9}$.

Pro funkce f_1 až f_5 postupujte obdobně jako u výše uvedených příkladů, a stejně vlastně i pro f_6; u f_7 budete během výpočtu umocňovat, tím vám „přibudou“ řešení, které na konci musíte „zahodit“.

Bonusové příklady:
$f_8 : x \mapsto x^4 - 2x^2, \quad f_9 : x \mapsto (x^2 - 2x)^2, \quad f_{10} : x \mapsto \frac{2x^2+5x+3}{x+1}.$