

## Pátá semestrální práce z předmětu AN2E

Podstatná součást všech úkolů je přiměřeně podrobný popis, jak jste k výsledkům došli.

1. Dokažte větu o limitě součinu posloupností pro následující případy limit  $a, b$

- (a)  $a, b \in \mathbb{R}$ ,
- (b)  $a > 0, b = -\infty$ ,
- (c)  $a = +\infty, b = -\infty$ ,

body: 6/4/2

2. Které z následujících posloupností jsou Cauchyovské?

$$\left\{ \frac{1}{n} \right\}, \quad \{ \sqrt{n} \}, \quad \{ (-1)^n \}, \quad \left\{ \frac{n}{n^2 + 1} \right\}, \quad \left\{ \frac{\sin n}{n} \right\}, \quad \left\{ \frac{n^3}{n^2 + 1} \right\}.$$

body: 6/4/2

3. Z kterých vět o limitách posloupností plyne

- (a) množina konvergentních posloupností tvoří podprostor množiny všech posloupností (reálných čísel),
- (b) zobrazení, které konvergentní posloupnosti přiřadí její limitu, je lineární.

Návod: napište definici příslušných pojmů lineární algebry a přepište vztahy v ní obsažené pro výše uvedený případ. body: 6/4/2

4. Pro následující součty vypište první tři a poslední tři členy (ve tvaru prvního příkladu)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k &= 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n \\ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right), \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + k} \\ \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}, \quad \sum_{k=0}^n \frac{k}{2^k}, \quad \sum_{k=0}^n \frac{(-k)^3}{2^k} \end{aligned}$$

body: 6/4/2

5. Součty v příkladu 4 jsou  $n$ -tými členy posloupností (nazýváme je posloupnostmi částečných součtů). Určete, které z těchto *posloupností částečných součtů* jsou monotonní a určete druh monotonie (tedy, jestli je posloupnost částečných součtů rostoucí, nerostoucí, klesající, neklesající či konstantní). body: 6/4/2
6. Sečtěte výrazy  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$  (návod: napište několik prvních a několik posledních členů a upravte). Po sečtení vypočtěte limity posloupností  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ ,  $\{c_n\}$ .

$$a_n = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right),$$
$$b_n = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right),$$
$$c_n = \sum_{k=1}^n \left( \frac{k+2}{k+1} - \frac{k+1}{k} \right).$$

body: 6/4/2

7. Převed'te na zlomek s celočíselným čitatelem a jmenovatelem ve zkráceném tvaru číslo  $0.\overline{12345}$ . body: 3/2/1
8. Vypoč'tete desetinný rozvoj čísla  $\frac{12}{13}$ . body: 3/2/1