Šestá semestrální práce z předmětu AN2E

Podstatná součást všech úkolů je přiměřeně podrobný popis, jak jste k výsledkům došli.

1. Napište prvních 10 cifer desetinného (dekadického) a dvojkového (binárního) rozvoje zlomku $\frac{6}{7}$. Určete horní odhad chyby, které se dopustíme, když číslo nahradíme jeho konečným desetinným a dvojkovým rozvojem o deseti cifrách.
   Návod: dvojkový rozvoj počítejte obdobně jako desetinný; horní odhad získáte sečtením řad $\sum_k \frac{9}{10^k}$, $\sum_k \frac{1}{2^k}$ začínajících vhodnou hodnotou indexu k. body: 6/4/2

2. Ukažte, že součet harmonické řady je roven $+\infty$. body: 6/4/2

3. Jsou všechny následující úpravy a úvahy správné? Nebo je některá chybná? Která?

   (a) Uvažujme řadu

   $$s_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots$$

   a vydělme ji člen po členu dvěma

   $$\frac{s_1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \frac{1}{16} + \cdots .$$

   Vidíme, že stejnou řadu dostaneme z původní vynecháním členů na lichých pozicích. Odtud plyne

   $$\frac{s_1}{2} = s_1 - \frac{s_1}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \cdots .$$

   A odtud

   $$0 = \frac{s_1}{2} - \frac{s_1}{2} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \cdots ,$$

   a tedy součet kladných čísel je roven nule. body: 3/2/1

(b) Uvažujme řadu

$$s_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$

Její členy vydělíme dvěma a proložíme je nulami

$$\frac{s_2}{2} = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} + \cdots .$$

Obě řady člen po členu sečteme

$$\frac{3s_2}{2} = s_2 + \frac{s_2}{2} = 1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots .$$

Dostali jsme stejnou řadu jako na začátku, jen se zpřeházenými členy. Proto platí $s_2 = \frac{3s_2}{2}$. body: 3/2/1

(c) Uvažujme geometrickou řadu

$$s_3 = 1 + \frac{8}{7} + \frac{64}{49} + \frac{8^3}{7^3} + \frac{8^4}{7^4} + \cdots$$

a vynásobme ji číslem $\frac{8}{7}$

$$\frac{8s_3}{7} = \frac{8}{7} + \frac{64}{49} + \frac{8^3}{7^3} + \frac{8^4}{7^4} + \frac{8^5}{7^5} \cdots .$$

Vidíme, že platí $s_3 = 1 + \frac{8s_3}{7}$, odkud dostaneme $s_3 = -7$.

body: 3/2/1

4. Určete, které z následujících řad konvergují a které konvergují absolutně

$$\sum \frac{k^2}{2^k}, \qquad \sum \frac{(-1)^k k^2}{k^4+1}, \qquad \sum \frac{(-1)^k}{3k-1}.$$

body: 9/6/3