

## Sedmá semestrální práce z předmětu AN2E

Podstatná součást všech úkolů je přiměřeně podrobný popis, jak jste k výsledkům došli.

1. Následující mnohočleny rozložte na součin v  $\mathbb{R}$  nerozložitelných mnohočlenů

(a)

$$x^4 - 81, \quad x^3 + 3x^2 - 3x - 1, \quad x^6 - 1, \quad x^4 + 18x^2, \\ x^4 + 18x^2 + 81, \quad x^4 + 18x^2 + 80,$$

(bonus)

$$x^4 + 81, \quad x^8 - 1, \quad x^6 + 1.$$

body: 6/4/2

2. Následující výrazy rozložte na součet polynomu a parciálních zlomků

$$\frac{x^6}{x^4 - 1}, \quad \frac{x^6}{x^6 - 1}, \quad \frac{1}{x^2(x^2 + x + 1)^2}.$$

Literatura: [JV] 9.3.5, 9.3.9, 9.3.12; [IK1] 9.7, 9.7a-c.      body: 6/4/2

3. Sečtěte řady

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+4)}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k-1}{k(k+1)(k+2)}.$$

Návod: rozložením racionální funkce na součet parciálních zlomků dostanete „teleskopické“ řady.      body: 6/4/2

4. Ukažte, že funkce

$$f_1 : x \mapsto 2x + \sqrt{4x^2 + x + 9}, \quad f_2 : x \mapsto -2x + \sqrt{4x^2 + x + 9},$$

jsou monotonní na svém definičním oboru (který je roven  $\mathbb{R}$ ). Dále nalezněte funkce k nim inverzní (předpis i definiční obor) a vypočtěte derivaci obou funkcí a funkcí k nim inverzních.

Návod: při hledání inverzní funkce řešíte rovnici  $f(x) = t$  s neznámou

$x$  a parametrem  $t$ . Rozmyslete si, jak byste postupovali při řešení rovnice s konkrétní číselnou hodnotou  $t$  a postupujte obdobně. Vyjde vám jeden kořen, proto inverzní funkce existuje. Dejte pozor na to, že jste při řešení rovnice umocňovali, proto nemůžete z výsledku mechanicky určit definiční obor inverzní funkce. Tento definiční obor můžete získat například výpočtem limit funkce  $f$  v obou nevlastních bodech.

body: 6/4/2

5. Pro  $f_3 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{4x^2+x+9}}$  a funkce  $f_1, f_2$  z předchozího příkladu vyjádřete výrazy  $f_3(f_1^{-1}(t)), f_3(f_2^{-1}(t))$  jako racionální funkce proměnné  $t$ .

Návod:  $x = f_1^{-1}(t)$  je ekvivalentní s  $t = f_1(x)$  a to je totéž jako  $t = 2x + \sqrt{4x^2 + x + 9}$ , tedy platí  $f_3(x) = \frac{1}{t-2x}$  a tedy  $f_3(f_1^{-1}(t)) = \frac{1}{t-2f_1^{-1}(t)}$ .

body: 6/4/2

6. Pro funkci  $f$  proveďte totéž jako v příkladu 4 s tím rozdílem, že navíc určíte definiční obor funkce  $f$ .

$$f : x \mapsto \sqrt{\frac{5-x}{x+2}}.$$

Dále do  $\sqrt{(5-x)(x+2)}$  dosadíte  $x = f^{-1}(t)$  a výsledek upravte do tvaru racionální funkce.

Návod: uvědomte si, že platí  $\sqrt{(5-x)(x+2)} = |x+2|\sqrt{\frac{5-x}{x+2}}$ .

body: 6/4/2

7. Totéž jako v příkladu 4 pro funkce

$$g_1 : x \mapsto \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad x \in (-\pi, \pi), \quad g_2 : x \mapsto \operatorname{tg} x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Dále vyjádřete  $\sin x$  a  $\cos x$  jako racionální funkce proměnné  $t = g_1(x)$  a  $\sin^2 x$ ,  $\sin x \cos x$  a  $\cos^2 x$  jako racionální funkce proměnné  $t = g_2(x)$ .

Návod: jedno z možných odvození pro  $g_1$  najdete v [JV] 9.3.19, jiné dostanete ze vztahů  $\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1+\cos x}{1-\cos x}$ ,  $|\sin x| = \sqrt{1-\cos^2 x}$ . Pro  $g_2$  použijte vztah  $\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$ .

body: 6/4/2