

Písenná část zkoušky z předmětu AN2E
3. června 2016

Jméno a příjmení:

Skutečná písenná práce bude obsahovat 5 příkladů.

Zvolte si pořadí, v jakém budete příklady řešit. Vaše řešení nemusí být „kulturně“ zapsané, ale po vyřešení příkladu přepište podstatné kroky i s komentářem na zvláštní list a odevzdejte tento zvláštní list (listy) i všechny ostatní listy, které jste při řešení popsali. Na jeden zvláštní list přepisujte řešení více příkladů – ideálně všech.

Tento list použijte jako obálku a podepište jej.

Pro úspěšné absolvování musíte písennou část napsat na alespoň 51%.

1. Pro funkci $f : x \mapsto \sqrt{3x} + \sqrt{3x^2 + 2x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

- (a) Vyřešte rovnici $y = f(x)$ s neznámou x a parametrem y . Samozřejmou součástí výsledku je uvedení počtu řešení v závislosti na hodnotě parametru.
- (b) Zdůvodněte, že je funkce f prostá.
- (c) Vypočtěte limity funkce f v $\pm\infty$.
- (d) Vypočtěte derivace funkcí f i f' a použijte je k důkazu, že je funkce f ryze monotónní.
- (e) Určete definiční obor a obor hodnot funkce f^{-1} .

2. Určete definiční obor funkce f a nalezněte maximální (vzhledem k inkluzi) interval, na němž je f konvexní.

$$f : x \mapsto \exp(1 - x^2)$$

3. Určete definiční obor funkce f a nalezněte maximální (vzhledem k inkluzi) interval, na němž je f konvexní.

$$f : x \mapsto \log \sqrt{1 - x^2}$$

4. Napište definici inflexního bodu (u ústní zkoušky se zeptám, odkud jste definici čerpali), určete definiční obor funkce f a nalezněte její inflexní body.

$$f : x \mapsto \exp(1 - x^2)$$

5. Napište definici inflexního bodu (u ústní zkoušky se zeptám, odkud jste definici čerpali), určete definiční obor funkce f a nalezněte její inflexní body.

$$f : x \mapsto \log \sqrt{1 - x^2}$$

6. Určete, zda existují limity funkce f v bodech 0 a 1 zleva a zprava a popřípadě je vypočtěte.

$$f : x \mapsto \sqrt[5]{x^2} \log x$$

7. Určete, zda existují limity funkce f v bodech 0 a 1 zleva a zprava a popřípadě je vypočtete.

$$f : x \mapsto \sqrt[5]{x^2} \log |x|$$

8. Určete, zda existují limity funkce f v bodě 0 zleva a zprava a popřípadě je vypočtete.

$$f : x \mapsto x^8 \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

9. Určete, zda existují limity funkcí f, g v bodě 0 a popřípadě je vypočtete.

$$f : x \mapsto (1 - 2x)^{\frac{1}{x}}, \quad g : x \mapsto (2 - x)^{\frac{1}{x}}$$

10. Pro funkci

$$f : x \mapsto \cos(2x^3) - \exp(x^6)$$

- (a) Sestrojte Taylorův polynom šestého stupně v bodě 0,
- (b) Taylorův polynom použijte k výpočtu limity podílu $f(x)/x^6$ pro $x \rightarrow 0$
- (c) a k výpočtu hodnoty šesté derivace funkce f v bodě nula.

11. Pro funkci

$$f : x \mapsto \sin(3x^2) - 3x^2 \exp(x)$$

- (a) Sestrojte Taylorův polynom šestého stupně v bodě 0,
- (b) Taylorův polynom použijte k výpočtu limity podílu $f(x)/x^3$ pro $x \rightarrow 0$
- (c) a k výpočtu hodnoty třetí derivace funkce f v bodě nula.

12. Najděte horní odhad chyby, které se dopustíte aproximací výrazu $\sqrt[3]{1 - 6x}$ výrazem $1 - 2x$ pro $x \in (-0.1, 0.1)$.

13. Najděte horní odhad relativní chyby, které se dopustíte aproximací výrazu $\sin \varphi$ výrazem φ . Přitom φ je v radiánech a dosazujete za něj hodnoty odpovídající úhlu mezi 0 a 5 stupni. Výsledek uveďte v procentech.

14. Které z následujících posloupností jsou Cauchyovské?

$$\left\{ \frac{n}{n^2 + 1} \right\}, \quad \left\{ \frac{n^2 + 1}{n} \right\}, \quad \left\{ \frac{(-1)^n n}{2n + 1} \right\}, \quad \left\{ \frac{(-1)^n n}{2n^2 + 1} \right\}, \quad \left\{ \frac{\sin n}{n} \right\},$$

15. Číslo x má periodický dvojkový rozvoj $0.\overline{101}$. Napište jej ve tvaru geometrické řady a poté řadu sečtete a vyjádřete x jako racionální číslo ve zkráceném tvaru.

16. Sečtete výraz a_n a poté vypočtete limitu posloupnosti $\{a_n\}$.

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{2 - k}{k(k+1)(k+2)}$$

17. Sečtete nekonečnou řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

18. Určete, které z následujících řad konvergují a které konvergují absolutně

$$\sum \frac{(-1)^k 3^k}{k^3}, \quad \sum \frac{(-1)^k k^3}{3^k}, \quad \sum \frac{(-1)^k}{3k-1}.$$

19. Určete, které z následujících řad konvergují a které konvergují absolutně

$$\sum \frac{(-1)^k k^2}{k^4+1}, \quad \sum \frac{(-1)^k k^4}{k^2+1}.$$

20. K funkcím f, g nalezněte primitivní funkce na $(0, \infty)$

$$f : x \mapsto \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x^5}(1 + \sqrt[3]{x})}, \quad g : x \mapsto x^3 \exp(-x)$$

21. K funkcím f, g nalezněte primitivní funkce na $(0, \infty)$

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{4^{3x}}}{1 + 4^x}, \quad g : x \mapsto \operatorname{arctg} x$$

22. K funkcím f, g nalezněte primitivní funkce na $(0, \infty)$

$$f : x \mapsto \cos^9 x, \quad g : x \mapsto x^3 \log x$$

23. Načrtněte obrazec $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], y \in [0, \sqrt{x^3}]\}$ a vypočtěte jeho obsah a obvod.

24. Vypočtěte délku oblouku křivky o rovnici $y = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [0, \frac{1}{2}]$.

25. Vypočtěte objem a povrch tělesa, které vznikne rotací obrazce \mathcal{O} kolem osy x .

$$\mathcal{O} = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 2], y \in [0, \sqrt{x}]\}$$

26. Převed'te integrál dvěma různými substitucemi na integrál racionální funkce a pro jednu z nich pak napište tvar parciálních zlomků. Koeficienty parciálních zlomků ani výsledný integrál nepočítejte. K oběma substitucím napište intervaly pro obě proměnné.

$$\int \frac{1 + \cos^4 x}{\cos x(8 + \sin^3 x)} dx$$

27. Převed'te integrál dvěma různými substitucemi na integrál racionální funkce a pro jednu z nich pak napište tvar parciálních zlomků. Koeficienty parciálních zlomků ani výsledný integrál nepočítejte. K oběma substitucím napište intervaly pro obě proměnné.

$$\int \frac{\sin^6 x + \cos^4 x}{2 + \sin x \cos x} dx$$