Požadavky k ústní části zkoušky z předmětu AN2E

Text pro studenty FP TUL
Martina Šimůnková
8. června 2016

Trojice čísel oddělená tečkou odkazují na odstavce v knize [JV].

Vykřičník u důkazu znamená, že vyjevení jeho neznalosti bude mít pro stávající termín fatální následky. Vykřičníky budou přibývat a připouštím i možnost výskytu opačného jevu.

Spočetné a nespočetné množiny

1. Definujte množinu racionálních čísel a ukažte, že ji lze „srovnat“ do posloupnosti. Přesněji řečeno: existuje posloupnost $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že množina $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ je rovna množině $\mathbb{Q}$ racionálních čísel. Zkonstruujte takovou posloupnost. Množinu, kterou lze srovnat do posloupnosti, nazýváme *spočetnou*. V matematické literatuře není terminologická shoda, zda jsou konečné množiny spočetné. Podle naší definice jsou, protože nepožadujeme, aby posloupnost byla prostým zobrazením, můžou se v ní tedy čísla opakovat.

2. Definovat množinu reálných čísel je o dost složitější, my proto používáme axiomatickou definici: (1) až (13) z článku 1.3 v [JV], velmi doporučuji číst začátek článku. Všechny vám známé další vlastnosti reálných čísel se dají z těchto vlastností odvodit – jako příklad uveďme $(\forall x, y \in [0,\infty))(x < y \Rightarrow x^2 < y^2)$. V dalším nás bude zajímat především axiom (13) o existenci suprema. Na množině racionálních čísel platí (1) až (12), ale (13) neplatí: například množina $\{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$ má v $\mathbb{R}$ supremum $\sqrt{2}$, ale v $\mathbb{Q}$ supremum nemá.

3. Množinu reálných čísel není možné srovnat do posloupnosti (takové množiny nazýváme *nespočetné*). Důkaz používá desetinný rozvoj a jeho vlastnost „omezené jednoznačnosti“, proto ho uvedeme až při probírání číselných řad.
Tento důkaz je názorně na www.matematika.cz/spocetne-mnoziny, dále tam je posloupnost z bodu 1.

Limita monotonní funkce

1. Věta 4.3.40 o jednostranných limitách monotonní funkce s důkazem! (stačí nakreslit a vysvětlit obrázek) a důsledek 4.3.41.

2. Poznámka 4.3.42: na obrázku vysvětlete, že interval J_x je neprázdný právě v bodech nespojitosti funkce f (tj. platí $\lim_{t\to x^-} f(t) \le \lim_{t\to x^+} f(t)$ a rovnost platí právě když je funkce v bodě x spojitá); dále na obrázku vysvětlete v poznámce uvedenou nerovnost mezi limitami a z ní plynoucí $J_x \cap J_y = \emptyset$.

3. Tvrzení 4.3.43 o spočetnosti množiny bodů nespojitosti monotonní funkce s důkazem.

Konvexní funkce

1. Definice 7.2.1 konvexní kombinace vektorů. Geometrická ilustrace pro prostor $X = \mathbb{R}^2$: zakreslete v rovině body A, B a pro $\alpha \in (0,1)$ bod $B + \alpha(B - A)$ a uvědomte si, že tyto body vyplní úsečku AB. Úprava $\alpha x + (1-\alpha)y = y + \alpha(x - y)$ pak dává smysl definici množiny $\{\alpha x + (1-\alpha)y : x, y \in \mathbb{R}^2, \alpha \in (0,1)\}$ jako úsečky o krajních bodech x, y. My budeme v dalším pracovat s vektory na přímce, tedy s prostorem $X = \mathbb{R}$, a tedy x, y budou reálná čísla.

Mimo požadavky, pro zvídavé studenty: konvexní kombinace více vektorů $x_1, \dots, x_k$ je lineární kombinace $\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i$ s $\alpha_i \in (0,1)$, $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$; barycentrické souřadnice: souřadnice středu úsečky A, B: $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$, těžiště trojúhelníku ABC: $\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$.

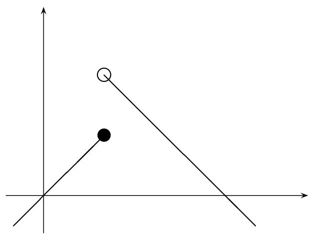
2. Definice 7.2.2 konvexní funkce a geometrický význam výrazů na obou stranách nerovnosti

(7.3). Viz poznámka 7.2.3.
Návod k odvození vztahů v poznámce 7.2.3: ze vztahu $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ vyjádřete $\alpha = (x - x_2)/(x_1 - x_2)$ a dále $1-\alpha$, dosaďte do (7.3) a využijte úpravu v **1**.
3. Věta 7.2.4 o směrnicích sečen konvexní funkce s důkazem!, příklad 7.2.5. Poznámka 7.2.6: „nadgraf" definujeme jako množinu $\{(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : x \in (a, b), y \geq f(x)\}$ (nakreslete obrázek).
4. Příklad 7.2.7 nespojité konvexní funkce.
5. Věta 7.2.8 o spojitosti konvexní funkce na otevřeném intervalu a o její derivaci s důkazem a poznámka 7.2.9.
6. Lemma 7.2.12 o monotonii derivace konvexní funkce s důkazem!.
7. Lemma 7.2.13 o znaménku druhé derivace konvexní funkce, důkaz! jen jedné implikace, poznámka 7.2.14.
8. Proč je v předchozích lemmatech ekvivalence a jak je to s implikací ve větě 5.2.22. Příklad funkce f rostoucí na otevřeném intervalu I, která má na I derivaci f', ale neplatí $(\forall x \in I)(f'(x) > 0)$: $x \mapsto x + \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.
9. Geometrický význam nulové první (tečna je rovnoběžná s . . .) a druhé (graf má nulovou křivost, což geometricky znamená, že tečna graf aproximuje lépe než jakákoliv kružnice, o aproximaci více viz kapitola o Taylorově polynomu) derivace. Definice inflexního bodu, například 7.2.15. Můžete použít jinou definici, ale v tom případě uveďte zdroj.

Grafy funkcí: spojitost, derivace, tečna

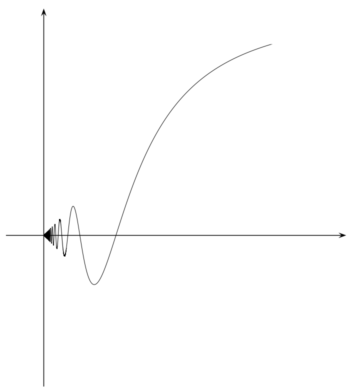
1. Pro zopakování a doplnění některých pojmů (spojitost, limita, nespojitost typu skok, tečna, derivace) uveďme grafy:

$$f_1(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \leq 1 \\ 3 - x & \text{pro } x > 1 \end{cases}$$



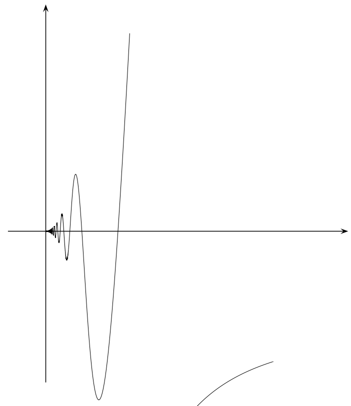
Funkce f_1 má v bodě 1 jednostranné limity, ty se nerovnají – nemá tedy oboustrannou limitu. Není v bodě 1 spojitá a takovouto nespojitost nazýváme *nespojitostí typu skok*. Funkce f_1 je v bodě 1 spojitá zleva a není spojitá zprava.

$$f_2(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$



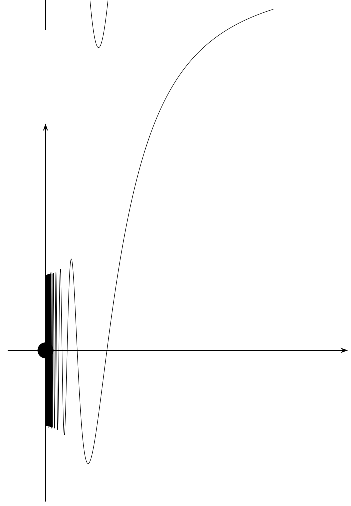
Funkce f_2 je spojitá na $\mathbb{R}$. Spojitost v bodě nula zdůvodníme výpočtem limity – použijeme větu o 3 limitách (policejní větu zvanou též věta o sevřené funkci). Derivaci má f_2 všude kromě nuly.

$$f_3(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$



Funkce f_3 je, podobně jako f_2, spojitá na $\mathbb{R}$. Na rozdíl od f_2 má f_3 na $\mathbb{R}$ derivaci – viz funkce f_4.

$$f_4(x) = f_3'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$



Derivaci v bodě nula spočítáme z definice: $f_4(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f_3(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$ a limitu vypočteme užitím věty o 3 limitách. Funkce f_4 není spojitá v nule (zatímco výraz $2x \sin \frac{1}{x}$ má v nule limitu nula, tak výraz $\cos \frac{1}{x}$ v nule limitu nemá) – vidíme tedy, že derivace funkce *nemusí* být spojitou funkcí.

2. Jak je uvedeno výše, má funkce f_3 v nule nulovou funkční hodnotu a nulovou derivaci. Mnohokrát jsme si říkali, že existence vlastní derivace znamená existenci tečny a že hodnota derivace je rovna směrnici tečny. Příklad bodu $x = 0$ a funkce f_3 toto naše tvrzení poněkud problematizuje; záleží na tom, co rozumíme pod pojmem tečna. My se nebudeme řídit geometrickými, ale aproximačními vlastnostmi: tečna funkce f v bodě x pro nás bude přímka, která je grafem té lineární funkce, která nejlépe aproximuje funkci f v okolí bodu x ve smyslu příkladu 5.2.10 a poznámky 5.2.11.

Podobně jako lze definovat tečnu pomocí aproximačních vlastností jako tu mezi všemi přímkami, která se od křivky nejméně „odchyluje" v okolí tečného bodu, lze definovat oskulační kružnici jako tu s nejlepšími lokálními aproximačními vlastnostmi. Převrácenou hodnotu poloměru oskulační kružnice nazýváme křivostí křivky v daném bodě. Pokud tečna aproximuje křivku v okolí bodu lépe než libovolná kružnice, říkáme, že má křivka v daném bodě nulovou křivost (což odpovídá nekonečnému poloměru oskulační kružnice). Z hodnoty první a druhé derivace lze spočítat křivost v bodě x: $|f''(x)|/\sqrt{(1 + (f'(x))^2)^3}$.

L'Hospitalovo pravidlo

1. Cauchyova věta o střední hodnotě (5.2.20) s důkazem. Odpustím a napovím, pokud si správně nezapamatujete pomocnou funkci F, ale budete vědět, co s ní máte dále dělat.
2. Věta 5.2.28 s hlavní myšlenkou důkazu!.
3. Použití L'Hospitalova pravidla viz [IC], začátek 6. kapitoly.

Aproximace funkce polynomem, Taylorův polynom

1. O aproximaci viz text na začátku článku 7.4. a text mezi poznámkou 7.4.3. a příkladem 7.4.4.
Taylorův polynom funkce f v bodě x_0 jako polynom, který má v bodě x_0 stejnou funkční hodnotu a derivace až do určitého řádu jako funkce f; viz příklad 7.4.1 a definice 7.4.2.
Lagrangeův (interpolační) polynom funkce f jako polynom, který má v několika zadaných bodech stejnou funkční hodnotu jako funkce f (příklad 7.4.4 a definice 7.4.5).
Definice 7.4.6 zbytku Taylorova (nebo i Lagrangeova) polynomu jako chyby, které se do-

pustíme nahrazením funkce f jejím Taylorovým polynomem.
2. Příklad 7.4.11: Taylorův polynom funkce, která je sama polynomem.
Příklad 7.4.14 Taylorových polynomů exponenciální funkce, goniometrických funkcí sinus a kosinus.

Příklad 7.3.1 z [JV-K] (na webu úplně dole) výpočtu „Taylorova polynomu" (uvozovky kvůli členu se zápornou mocninou) funkce kotangens dělením Taylorových polynomů funkcí sinus a kosinus.

Příklad 7.4.15 Taylorových polynomů hyperbolických funkcí.
Příklad 7.4.26 Taylorova polynomu logaritmu.
Příklad 7.4.28: zobecněná binomická věta jako Taylorův polynom.
Příklad 6.3.12 a 7.4.29 nenulové funkce, která má v bodě x_0 derivace všech řádů nulové, tedy i všechny její Taylorovy polynomy v tomto bodě jsou nulové.
3. Věta 7.4.8 o Lagrangeovu zbytku Taylorova polynomu a její použití na horní odhad zbytku. Poznámka 7.4.9.

Věta 7.4.10 o zbytku Lagrangeova polynomu s důkazem. Čebyševovy polynomy $x \mapsto \cos(n \arccos x)$ a jejich kořeny jako „ideální" interpolační body. Jak je implementován sinus v kalkulačkách?

4. Lemma 7.4.20 o Taylorově polynomu jako nejlépe lokálně aproximujícím polynomu s důkazem.

Posloupnosti čísel – opakování a doplnění

1. Důkaz! věty o limitě součinu pro posloupnosti pro vlastní i nevlastní limity: věta 2.1.22 a věta 2.3.5. Věta 2.1.28 o limitě posloupnosti a absolutní hodnotě. Věta 2.3.2 o limitě a nerovnostech.
2. Věta 2.4.1 o posloupnosti uzavřených vložených intervalů s důkazem. Věta 2.4.4 o vybrané konvergentní posloupnosti z omezené posloupnosti s důkazem. Definice 2.4.6 Cauchyovské posloupnosti. Lemma 2.4.7 o cauchyovské a konvergentní posloupnosti s důkazem!. Věta 2.4.8 o Bolzano-Cauchyově podmínce pro posloupnosti s důkazem.

Číselné řady

1. Definice 3.1.1 n-tého částečného součtu řady, součtu řady, konvergentní a divergentní řady, členů řady. Lemma 3.1.2 o nutné podmínce konvergence řady. Poznámky 3.1.3 o dvojím významu symbolu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$; o vynechávání mezí; o změně případně vynechání konečného počtu členů řady bez vlivu na konvergenci řady;
2. Taylorova řada. Použití věty o Lagrangeově zbytku Taylorova polynomu na příklady (7.4.11...) z odstavce **2** kapitoly o aproximaci funkcí polynomem.
3. Součet konečné geometrické řady (příklad 1.3.29, odvození na přednášce používá úpravu součtu obdobnou jako jeden z příkladů šesté semestrální práce). Příklad 3.1.4 o konvergenci geometrické řady; v zimním semestru jsme ukazovali, že pro $q \in (-1, 1)$ a $n \to \infty$ je $q^n \to 0$ pomocí logaritmů. Lze zvolit elementárnější důkaz: z binomické věty odvodíme pro $a > 0$ nerovnost $(1 + a)^n \le 1 + na$ a pro $q \in (-1, 1)$ položíme $|q| = 1/(1 + a)$. Alternativní důkaz používající Bernoulliovu nerovnost je v příkladu 2.2.14.
Příklad 7.4.27: geometrická řada jako Taylorův polynom.
4. Příklad 3.2.7 o posloupnostech a Eulerovu číslu.
5. Nekonečný součet harmonické řady – v [JV] je na několika místech různými způsoby; ocením, když budete umět jiný způsob než ten, který jsem vám přednášela.
6. Řady s nezápornými členy: kritéria konvergence: srovnávací kritérium 3.2.2, podílové kritérium 3.2.16, limitní srovnávací kritérium 3.2.25, limitní podílové kritérium 3.2.26, vše i s důkazy.
7. Absolutní a neabsolutní konvergence. Leibnizovo kritérium pro řady se střídavými znaménky 3.3.1 s důkazem!.
8. Přerovnání řady: příklad 3.4.1, definice 3.4.2 (můžete říci volně slovy), lemmata a věta 3.4.4.až 3.4.6 i s důkazy; Věta 3.4.7.

Primitivní funkce a Riemannův integrál

1. Definice 9.1.1, lemma 9.1.2 s důkazem!, poznámka 9.1.3.
2. Úvahy za poznámkou 9.1.3 a axiomy O1, O2, O3, lemma 9.1.4 i s důkazem!.
3. Věta 9.1.6 (důkaz pomocí Riemannova integrálu: ukážeme, že spojitá funkce má na omezeném intervalu Riemannův integrál a pak ukážeme, že Riemannův integrál s proměnnou horní mezí je hledanou primitivní funkcí). lemma 9.1.10 i s důkazem!
4. Poznámky ke značení: 9.1.7 a 9.3.10 a 9.1.8.
5. Pravidla pro počítání primitivních funkcí: metoda per partes a její odvození z pravidla pro derivování součinu; substituční metoda a její odvození z pravidla pro derivování složené funkce [si]. Integrace racionální funkce.
6. Definice Riemannova integrálu [JVR]: definice 10.2.1, definice 10.2.4, lemma 10.2.5 s důkazem!, označení 10.2.6, lemma 10.2.7 s důkazem, lemma 10.2.8 s důkazem, definice 10.2.9, poznámka 10.2.10, věta 10.2.12 a důkaz, stačí obrázkem.
7. Riemannův integrál jako funkkcionál: označení 10.2.21; Vlastnosti tohoto integrálu bez důkazů: 10.2.23 (pozitivita), 10.2.24 (aditivita), 10.2.25 (homogenita), 10.2.26 (monotonie – zde ukázat, jak plyne z pozitivity, 10.2.33. Definice 10.2.34 (integrálu, který nemá dolní mez menší než horní).
8. Geometrické aplikace určitého integrálu [ai] s odvozením.