Semestrální práce z předmětu AN2E

Číselné řady

Podstatná součást všech úkolů je přiměřeně podrobný popis, jak jste k výsledkům došli.

1. Číslo mající dekadický (desetinný) periodický rozvoj $0.\overline{123}$ vyjádřete ve tvaru zlomku s celočíselným čitatelem a jmenovatelem ve zkráceném tvaru.

   Úlohu řešte dvěma způsoby: sečtením geometrické řady a vynásobením čísla vhodnou mocninou deseti.

2. Číslo mající binární (dvojkový) periodický rozvoj $0.\overline{010011}$ vyjádřete ve tvaru zlomku s celočíselným čitatelem a jmenovatelem ve zkráceném tvaru.

   Úlohu řešte dvěma způsoby: sečtením geometrické řady a vynásobením čísla vhodnou mocninou dvou.

3. Napište prvních šest cifer dekadického a binárního rozvoje zlomku $\frac{5}{7}$. Určete horní odhad chyby, které se dopustíte, když obecné číslo (nemusí to být 5/7) nahradíte jeho konečným desetinným, případně dvojkovým rozvojem o šesti cifrách za „desetinnou“ tečkou.

   Návod: dvojkový rozvoj počítejte obdobně jako desetinný; horní odhad získáte sečtením řad $\sum_k \frac{9}{10^k}$, $\sum_k \frac{1}{2^k}$ začínajících vhodnou hodnotou indexu k.

4. Které z následujících posloupností jsou Cauchyovské?

   $$\left\{\frac{1}{n}\right\}, \quad \left\{\sqrt{n}\right\}, \quad \left\{(-1)^n\right\}, \quad \left\{\frac{n}{n^2+1}\right\}, \quad \left\{\frac{\sin n}{n}\right\}, \quad \left\{\frac{n^3}{n^2+1}\right\}.$$

   Návod: přečtěte si v [JV] poznámky 2.1.8, konkrétně třetí poznámku, definici 2.4.6 a větu 2.4.8.

5. Z kterých vět o limitách posloupností plyne

   (a) množina konvergentních posloupností tvoří podprostor množiny všech posloupností,

   (b) zobrazení, které konvergentní posloupnosti přiřadí její limitu, je lineární.

Návod: napište definici příslušných pojmů lineární algebry (případně si najděte větu, která charakterizuje podprostor) a přepište vztahy obsažené v definici/větě pro výše uvedený případ.

6. Pro následující součty vypište první tři a poslední tři členy (ve tvaru prvního příkladu)

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k^{10}}, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{(-k)^3}{2^k}$$

7. Součty v příkladu 6 jsou n-tými členy posloupností (nazýváme je posloupnostmi částečných součtů). Určete, které z těchto *posloupností částečných součtů* jsou monotonní a určete druh monotonie (tedy, jestli je posloupnost částečných součtů rostoucí, nerostoucí, klesající, neklesající či konstantní).

8. Rozhodněte, které nekonečné řady z příkladu 6 (vzniklé nahrazením horní hranice n nekonečnem) jsou konvergentní a které jsou absolutně konvergentní.

9. Vypočtěte součty dané výrazy a_n, b_n, c_n (návod: napište několik prvních a několik posledních členů a upravte). Po sečtení vypočtěte limity posloupností $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$.

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right), \\ b_n &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{3}{k+1} + \frac{2}{k+2} \right), \\ c_n &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k+2}{k+1} - \frac{k+1}{k} \right). \end{aligned}$$

10. Ukažte, že součet harmonické řady je roven $+\infty$.

11. Použijte limitní srovnávací kritérium, divergentní harmonickou řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ a konvergentní řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k}$ ke zjištění konvergence řad (je

možné, že pro některou z řad nelze tímto způsobem rozhodnout)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{\sqrt{k}}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{\sqrt{k^3}}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k^3}.$$

Poté obdobně zjišťujte konvergenci řad v závislosti na hodnotách α, β

$$\sum_{k=2}^{\infty} \tfrac{1}{k^{\alpha}}, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \tfrac{1}{k^{\beta} \log k}$$

Pro jaké hodnoty α, β nelze tímto způsobem rozhodnout?
Pro jaké hodnoty zjistíte konvergenci a pro jaké divergenci?
Řešte pro $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.