prestižní pocty, mj. v roce 1740 spolu s LEONHARDEM EULEREM (1707 – 1783) a DANIELEM BERNOULLIM (1700 – 1782) za práce o přílivu a odlivu. Jeho jménem se označuje např. *Euler-Maclaurinova formule*, která se však v základním kurzu analýzy neobjevuje.

Literatura:

[1] Edwards, C. H.: *The historical development of the calculus*, Springer, New York, 1979.

[2] Flett, T. M.: *Some historical notes and speculations concerning the mean value theorems of the differential calculus*, The Institute of Mathematics and its Applications, 1974.

[3] Goldstine, H. H.: *A history of numerical analysis from the 16th through the 19th century*, Springer, New York, 1977.

[4] Petr, K.: *Počet differenciální (část analytická)*, Jednota československých mathematiků a fysiků, Praha, 1923.

[5] Roberts, A. W., Varberg, D. E.: *Convex functions*, Academic Press, New York and London, 1973.

[6] Rudin W.: *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill Comp., New York, 1976, (3. vydání).

[7] Stromberg, K. R.: *An introduction to classical real analysis*, Wadsworth, Inc., Belmont, CA, 1981.

[8] Šimerka, V.: *Přídavek k Algebře pro vyšší gymnasia*, Tiskem a nákladem Dr. E. Grégra, Praha, 1864.

Kapitola 8

Primitivní funkce

8.1 Motivační úvaha

Tato kapitola je věnována *metodám určování primitivních funkcí*. Začneme od základní definice.

Definice 8.1.1. Nechť f je funkce definovaná na $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Pak funkci F, pro kterou platí $F'(x) = f(x)$ pro *všechna* $x \in (a,b)$, nazýváme *primitivní funkcí k* f (na intervalu (a,b)).

Nalezení primitivní funkce je v jistém smyslu inverzní operací k derivování: je-li f' derivace funkce f na intervalu (a,b), pak f je primitivní funkcí k f' na (a,b). Primitivních funkcí k f však může být více. Je např. zřejmé, že primitivní funkcí k funkci cos (na $\mathbb{R}$) je nejen funkce sin, avšak také i funkce $\sin + 3$ a obecněji každá funkce $\sin + c$, kde c je libovolná konstantní funkce na $\mathbb{R}$. Primitivní funkce k téže funkci se však „více" lišit nemohou, což vyplývá z následujícího tvrzení.

Lemma 8.1.2. *Nechť F_1, F_2 jsou primitivními funkcemi k funkci f na intervalu (a,b). Potom jejich rozdíl je konstantní funkce.*

Důkaz. Platí $(F_1 - F_2)' = f - f = 0$, a tedy rozdíl $F_1 - F_2$ je konstantní funkce na (a,b) podle Věty 5.2.19, resp. podle jejího Důsledku 5.2.20. □

Poznámka 8.1.3. Je velmi podstatné, že jsme definovali primitivní funkci *na intervalu*. Rozdíl $2\,\mathrm{sgn} - \mathrm{sgn}$ má na $G := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ derivaci všude rovnou 0, ale není na G konstantní. Lemma 8.1.2 ukazuje, že k f existuje nekonečně mnoho primitivních funkcí, které se navzájem „liší o konstantu", tj. je-li F primitivní funkce k f, pak množina všech primitivních funkcí k f je množina $\{F + c;\ c \in \mathbb{R}\}$.

Nyní budeme zkoumat důvody, které nás k určování primitivních funkcí vedou. V Úvodu jsme se zmínili o tom, že některé poznatky byly pokládány za správné, neboť vyplývaly z názoru. Již před začátkem našeho letopočtu byl obsah rovinných obrazců chápán při kvadraturách jako aditivní a monotónní; v případě obdélníku byl dán známým vzorečkem.

Tyto vlastnosti byly používány intuitivně, o jejich správnosti se příliš nepochybovalo a explicitně se o nich nepsalo. K jejich „zpřesňování" docházelo pozvolna. Budeme se v tomto duchu zabývat intuitivně chápaným obsahem rovinného obrazce, vyhovujícím výše popsaným požadavkům; přesněji:

Nechť pro každou spojitou funkci f definovanou na intervalu $[0,\infty)$, $f \geq 0$, je pro všechna a, b, $0 \leq a < b < \infty$ definována množina $M(f;a,b)$

$$M(f;a,b) := \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\right\}.$$

Dále předpokládáme, že každé takové množině lze přiřadit „obsah podgrafu" [1]) $P(f;a,b)$. O tomto poměrně složitém zobrazení (je definováno na systému speciálních podmnožin množiny všech dvojic reálných čísel pomocí nezáporných spojitých funkcí a uzavřených intervalů)

$$M(f;a,b) \mapsto P(f;a,b)$$

předpokládáme, že má velmi jednoduché vlastnosti (O1)–(O3), popsané následujícími vztahy:

(O1) pro $a < c < b$, $f \in \mathcal{C}([0,\infty])$, platí $P(f;a,c) + P(f;c,b) = P(f;a,b)$, tj. obsah je „aditivní";

(O2) je-li $a \leq \alpha < \beta \leq b$, $f, g \in \mathcal{C}([0,\infty])$ a $M(g;\alpha,\beta) \subset M(f;a,b)$, pak $P(g;\alpha,\beta) \leq P(f;a,b)$, tj. obsah je „monotónní";

(O3) je-li f konstantní, tj. $f(x) = k \geq 0$ pro všechna $x \in [0,\infty)$, pak platí $P(f;a,b) = k(b-a)$, tj. obsah obdélníku se počítá tak, jak jsme zvyklí.

Ponechme prozatím stranou otázku, zda zobrazení s uvedenými vlastnostmi existuje. Vyřešíme ji později, v kapitole věnované Riemannově integrálu. Nyní se soustředíme na jednu vlastnost popsaného zobrazení a ukážeme si, jak pojem primitivní funkce s obsahem souvisí.

Lemma 8.1.4. *Nechť je dána funkce $f \in \mathcal{C}([0,\infty))$, $f \geq 0$. Předpokládejme, že existuje zobrazení $M(f;a,b) \mapsto P(f;a,b)$ s vlastnostmi* (O1) - (O3). *Potom pro funkci $F(x) := P(f;0,x)$, $x \in (0,\infty)$, platí*

$$F'(x) = f(x), \quad x \in (0,\infty).$$

Důkaz. Zvolme $x_0 \in (0,\infty)$ a spočtěme $F'_+(x_0)$. Z (O1) plyne pro každé $h > 0$

$$F(x_0+h) - F(x_0) = P(f;x_0,x_0+h).$$

[1]) Někdy se v této souvislosti mluví o ploše.

Ze spojitosti f v bodě x_0 plyne, že k libovolně zvolenému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x \in [x_0, x_0+\delta]$ platí

$$f(x_0) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon.$$

Vynásobíme nyní nerovnost číslem h, $0 < h < \delta$ a pomocí (O2) a (O3) dostaneme

$$(f(x_0) - \varepsilon)h \leq P(f;x_0,x_0+h) \leq (f(x_0)+\varepsilon)h;$$

pak po přepsání do zavedeného označení dostáváme

$$\left|\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \leq \varepsilon.$$

Odtud plyne $F'_+(x_0) = f(x_0)$. Analogicky provedeme úvahu i pro $F'_-(x_0)$ a dostaneme $F'_-(x_0) = f(x_0)$. Tím je tvrzení dokázáno. □

Máme-li k dispozici libovolnou primitivní funkci F k f, lze počítat plochu $P(f;a,b)$ pomocí vzorce

$$P(f;a,b) = F(b) - F(a).$$

To plyne z Lemmat 8.1.2 a 8.1.4. Zároveň to ukazuje, že hledání primitivních funkcí je z popsaného hlediska přirozené a užitečné. Uveďme několik ilustrativních příkladů.

Příklady 8.1.5. 1. Zřejmě je funkce $F(x) = x^2$, kde $x \in \mathbb{R}$, primitivní funkcí k funkci $f(x) = 2x$ na $\mathbb{R}$.

2. Obecněji platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{8.1}$$

Odtud vidíme, že k mocninám s přirozeným exponentem se lehce určují primitivní funkce: slouží k tomu vzorce pro derivování, někdy v nepatrně modifikovaném tvaru. Vzorec (8.1) platí dokonce pro všechna $n \in \mathbb{Z}$ s výjimkou $n = -1$, pro záporná n však pouze na intervalech $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$.

3. Příklad 7.1.1 (srovnej též s Příkladem 7.1.5) ukazuje, že funkce definovaná vztahy $F(x) = x^2 \sin(x^{-2})$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a $F(0) = 0$, je primitivní funkcí k funkci $f := F'$, avšak f *není* spojitá a dokonce *není na žádném okolí bodu* 0 *omezená*. To ukazuje, že mohou existovat primitivní funkce i k funkcím dosti komplikovaným.

Následující užitečnou větu uvedeme v tomto okamžiku *bez důkazu*, dokážeme ji až v Kapitole 10 (Věta 10.2.37). Ukazuje spolu s předcházejícím příkladem, že spojitost je postačující (nikoli však nutnou) podmínkou pro existenci primitivní funkce.